

I.

〔解答〕

(1)	$\overline{ア}$	
	10	
(2)	$\overline{イ}$	$\overline{ウ}$
	6	4

〔解説〕

(1)

$P(x)$ を $x^2 - 3x + 2$ で割ったときの商を $Q_1(x)$, $x^2 - 4x + 3$ で割ったときの商を $Q_2(x)$ とおくと

$$\begin{cases} P(x) = (x^2 - 3x + 2)Q_1(x) + x + 2 \\ P(x) = (x^2 - 4x + 3)Q_2(x) + 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = (x-1)(x-2)Q_1(x) + x + 2 \\ P(x) = (x-1)(x-3)Q_2(x) + 2x + 1 \end{cases}$$

であるから,

$$P(2) = 4, P(3) = 7 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。ここで, $P(x)$ を $x^2 - 5x + 6$ で割ったときの商を $Q_3(x)$, 余りを $ax + b$ とおく (a, b は実数)。このとき

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 - 5x + 6)Q_3(x) + ax + b \\ &= (x-2)(x-3)Q_3(x) + ax + b \end{aligned}$$

であるから, ①より

$$\begin{cases} 2a + b = 4 \\ 3a + b = 7 \end{cases}$$

である。これを解くと

$$(a, b) = (3, -2)$$

であるから, 求める余りは

$$3x - 2$$

となる。

(2)

剰余の定理より,

$$Q(1) = 3, Q(2) = 2, Q(3) = 1$$

である。ここで, p, q, r を実数として $Q(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ とおくと,

$$\begin{cases} 1 + p + q + r = 3 \\ 8 + 4p + 2q + r = 2 \\ 27 + 9p + 3q + r = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p + q + r = 2 \\ 4p + 2q + r = -6 \\ 9p + 3q + r = -26 \end{cases}$$

となり, これを解くと

$$(p, q, r) = (-6, 10, -2)$$

であるから,

$$Q(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 2$$

となる。次に, $Q(x)$ を $(x+2)^2$ で割ったときの商を $x+k$ とおくと (k は実数),

$$Q(x) = (x+2)^2(x+k) + 3x - 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。問題文の条件より $Q(4) = 7$ であるから,

$$6^2(4+k) + 10 = 7$$

$$\therefore k = -\frac{49}{12}$$

である。これを②に代入して整理すると

$$Q(x) = x^3 - \frac{1}{12}x^2 - \frac{28}{3}x - \frac{55}{3}$$

となる。

II.

〔解答〕

エ	オ	カ	キ	ク	ケ
2	6	7	3	2	3

〔解説〕

$$t = \sin x - \cos x$$

$$= \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

と変形でき、 $0 \leq x < \pi$ のとき $-\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi$ であるから、

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$$

である。よって t のとりうる値の範囲は

$$-1 \leq t \leq \sqrt{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、

$$t^2 = \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x = 1 - t^2$$

であり、これと $t = \sin x - \cos x$ より、

$$\begin{aligned} f(x) &= 3t^4 - 2t^2(t+1) + (1-t^2) \\ &= 3t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 1 \end{aligned}$$

となる。 $f(x)$ を $g(t)$ と改めると

$$\begin{aligned} g'(t) &= 12t^3 - 6t^2 - 6t \\ &= 6t(2t+1)(t-1) \end{aligned}$$

である。 $\textcircled{1}$ の範囲での $g(t)$ の増減表は下のようになる。

t	-1	...	$-\frac{1}{2}$	...	0	...	1	...	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(t)$	3		$\frac{11}{16}$		1		-1		$7-4\sqrt{2}$

したがって $g(t)$ は $t=1$ で最小値 -1 をとり、 $t=-1$ で最大値 3 をとる。ここで、

$$t=1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \left(\because -\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi\right)$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{2}$$

であり、

$$t=-1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \quad \left(\because -\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi\right)$$

$$\therefore x = 0$$

であるから、 $f(x)$ は $x = \frac{\pi}{2}$ で最小値 -1 をとり、 $x = 0$ で最大値 3 をとる。

III.

〔解答〕

コ	サ	シ	ス	セ
7	1	4	5	1

〔解説〕

三角形 ODE に関する余弦定理より

$$\begin{aligned} DE &= \sqrt{OD^2 + OE^2 - 2OD \cdot OE \cdot \cos \angle DOE} \\ &= \sqrt{1^2 + 3^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ} \\ &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

である。同様にして

$$\begin{aligned} EF &= \sqrt{OE^2 + OF^2 - 2OE \cdot OF \cdot \cos \angle EOF} \\ &= \sqrt{3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ} \\ &= \sqrt{7} \\ FD &= \sqrt{OF^2 + OD^2 - 2OF \cdot OD \cdot \cos \angle FOD} \\ &= \sqrt{2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

である。また、三角形 DEF に関する余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos \angle DEF &= \frac{DE^2 + EF^2 - FD^2}{2DE \cdot EF} \\ &= \frac{7 + 7 - 3}{2 \cdot 7} \\ &= \frac{11}{14} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \sin \angle DEF &= \sqrt{1 - \left(\frac{11}{14}\right)^2} \quad (\because 0^\circ < \angle DEF < 180^\circ) \\ &= \sqrt{\frac{196 - 121}{14^2}} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{14} \end{aligned}$$

である。よって三角形 DEF の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot DE \cdot EF \cdot \sin \angle DEF &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{14} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

である。ここで、 $0 < s < 1, 0 < t < 1$ なる実数 s, t を用いて

$$DJ : JE = s : 1 - s, \quad HJ : JG = t : 1 - t$$

とおく。このとき

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OJ} &= (1 - s)\overrightarrow{OD} + s\overrightarrow{OE} \\ &= (1 - s) \cdot \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + s \cdot \frac{3}{4}\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{1 - s}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3s}{4}\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OJ} &= t\overrightarrow{OG} + (1 - t)\overrightarrow{OH} \\ &= t \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + (1 - t) \cdot \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{t}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1 - t}{4}\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

と表すことができる。 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ は一次独立であるから

$$\begin{cases} \frac{1 - s}{4} = \frac{t}{2} \\ \frac{3s}{4} = \frac{1 - t}{4} \end{cases}$$

である。これを解くと

$$(s, t) = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

であるから、 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ を用いて

$$\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{20}\overrightarrow{OB}$$

と表される。また、 $0 < s' < 1, 0 < t' < 1$ なる実数 s', t' を用いて

$$HK : KI = s' : 1 - s', \quad FK : KE = t' : 1 - t'$$

とおく。このとき

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OK} &= (1 - s')\overrightarrow{OH} + s'\overrightarrow{OI} \\ &= (1 - s') \cdot \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + s' \cdot \frac{3}{4}\overrightarrow{OC} \\ &= \frac{1 - s'}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{3s'}{4}\overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OK} &= t'\overrightarrow{OE} + (1 - t')\overrightarrow{OF} \\ &= t' \cdot \frac{3}{4}\overrightarrow{OB} + (1 - t') \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \\ &= \frac{3t'}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1 - t'}{2}\overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

と表すことができる。 $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ は一次独立であるから

$$\begin{cases} \frac{1 - s'}{4} = \frac{3t'}{4} \\ \frac{3s'}{4} = \frac{1 - t'}{2} \end{cases}$$

である。これを解くと

$$(s', t') = \left(\frac{4}{7}, \frac{1}{7}\right)$$

であるから、

$$FK : KE = t' : 1 - t' = 1 : 6$$

である。さらに

$$\begin{aligned} DJ : JE &= s : 1 - s \\ &= \frac{1}{5} : \frac{4}{5} \\ &= 1 : 4 \end{aligned}$$

であるから、三角形 DEF の面積を S とおくと、三角形 EJK の面積は

$$\begin{aligned} \frac{JE}{DJ + JE} \cdot \frac{KE}{FK + KE} \cdot S &= \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot S \\ &= \frac{24}{35} S \end{aligned}$$

である。よって四角形 JKFD の面積は

$$\begin{aligned} S - \frac{24}{35} S &= \frac{11}{35} S \\ &= \frac{11}{35} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{11\sqrt{3}}{28} \end{aligned}$$

である。

IV.

〔解答〕

ソ	タ	チ	ツ
8	7	5	2

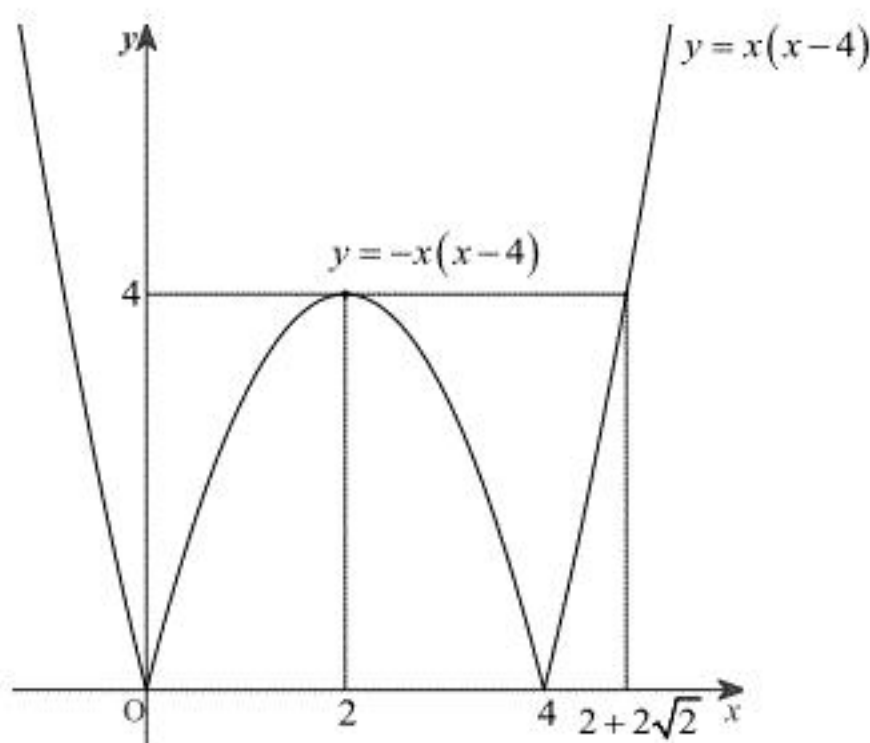
〔解説〕

$$f(x) = \begin{cases} x(x-4) & (x < 0, 4 \leq x) \\ -x(x-4) & (0 \leq x < 4) \end{cases}$$

であり、

$$-x(x-4) = -(x-2)^2 + 4$$

より、 $y = f(x)$ のグラフは以下ようになる。



よって、 $0 \leq t < 2$ のとき $f(x)$ は $x=t$ のとき最大となり、

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) \\ &= -t(t-4) \\ &= -t^2 + 4t \end{aligned}$$

となる。また、 $x \geq 4$ において

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x - 4 &= 0 \\ \therefore x &= 2 + 2\sqrt{2} \quad (\because x \geq 4) \end{aligned}$$

であるから、 $2 \leq t < 2 + 2\sqrt{2}$ のとき $f(x)$ は $x=2$ のとき最大となり、

$$\begin{aligned} g(t) &= f(2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

となる。 $2 + 2\sqrt{2} \leq t$ のとき $f(x)$ は $x=t$ のとき最大となり、

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) \\ &= t(t-4) \\ &= t^2 - 4t \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \int_0^6 f(x) dx &= \int_0^4 \{-x(x-4)\} dx + \int_4^{2+2\sqrt{2}} x(x-4) dx \\ &= -\int_0^4 x(x-4) dx + \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 \right]_4^{2+2\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{6} \cdot 4^3 + \frac{1}{3} (6^3 - 4^3) - 2(6^2 - 4^2) \\ &= \frac{32}{3} + \frac{152}{3} - 40 \\ &= \frac{64}{3} \end{aligned}$$

である。さらに、

$$\begin{aligned} \int_0^6 g(t) dt &= \int_0^2 \{-t(t-4)\} dt + \int_2^{2+2\sqrt{2}} 4 dt + \int_{2+2\sqrt{2}}^6 t(t-4) dt \\ &= \left[-\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 \right]_0^2 + [4t]_2^{2+2\sqrt{2}} + \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 \right]_{2+2\sqrt{2}}^6 \\ &= \frac{16}{3} + 8\sqrt{2} + \left(\frac{16}{3} + \frac{8\sqrt{2}}{3} \right) \\ &= \frac{32 + 32\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

である。

V.

〔解答〕

(1)	テ
	4
(2)	ト
	7
(3)	ナ
	3
(4)	ニ
	8

〔解説〕

(1)

b, c, d のうち少なくとも1つが a と等しい事象の余事象は、 b, c, d のすべてが a と異なる事象である。 a, b, c, d の選び方は全部で 10^4 通りあり、これらは同様に確からしい。10通りの a の値に対して、 b, c, d はそれぞれ a と異なる9通りの選び方があるから、求める確率は

$$1 - \frac{10 \cdot 9^3}{10^4} = \frac{271}{1000}$$

である。

(2)

1から10までの番号から相異なる4個を選ぶ方法は ${}_{10}C_4 = 210$ (通り)ある。これらの番号を小さい順に並べると $a < b < c < d$ なる数字の組が1つ得られる。したがって、 $a < b < c < d$ が成り立つような数字の組は210通りあるから、求める確率は

$$\frac{210}{10^4} = \frac{21}{1000}$$

である。

(3)

k を $1 \leq k \leq 10$ なる自然数として、 $a = k$ の場合を考える。このとき、 b, c, d はそれぞれ $10 - k$ 通りの選び方があるから、求める確率は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \frac{(10-k)^3}{10^4} &= \frac{1}{10^4} \sum_{k=1}^9 k^3 \\ &= \frac{1}{10^4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 9^2 \cdot 10^2 \\ &= \frac{81}{400} \end{aligned}$$

である。

(4)

b, c, d のうち少なくとも1つが a より大きいという事象の余事象は、 b, c, d のすべてが a 以下であるという事象であり、これをAとする。また、 b, c, d のうち少なくとも1つが a より小さいという事象の余事象は、 b, c, d のすべてが a 以上であるという事象であり、これをBとする。このとき、求める確率は $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ であり、

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \end{aligned}$$

である。ここで、 l を $1 \leq l \leq 10$ なる自然数として、 $a = l$ の場合を考えると、 a 以下の番号の玉は l 個ある。よって、

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{l=1}^{10} \frac{l^3}{10^4} \\ &= \frac{1}{10^4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 10^2 \cdot 11^2 \\ &= \frac{121}{400} \end{aligned}$$

であり、 $P(B)$ は対称性により $P(A)$ と等しい。よって $P(B) = \frac{121}{400}$ である。また、 $A \cap B$ は b, c, d のすべてが a と等しい事象であるから、

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \sum_{l=1}^{10} \frac{1^3}{10^4} \\ &= \frac{1}{1000} \end{aligned}$$

である。よって、求める確率は

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - \frac{121}{400} - \frac{121}{400} + \frac{1}{1000} \\ &= \frac{99}{250} \end{aligned}$$

である。