

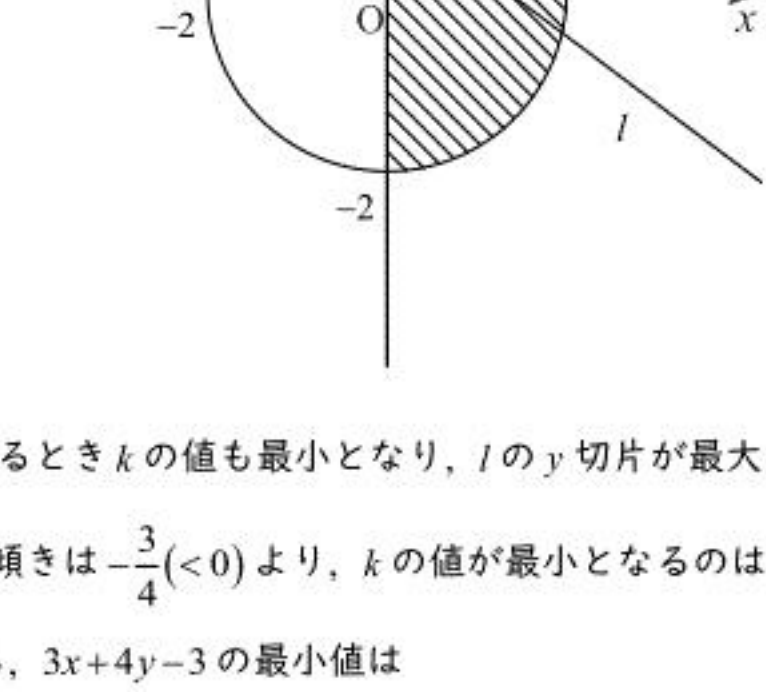
【1】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ
	-11	7	$4\sqrt{13}$
(2)	エ	オ	カ
	4	$2\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$
(3)	キ	ク	ケ
	$\frac{5}{2}\sqrt{6}$	$\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 2\right)$	$\frac{15}{2}$
(4)	コ	サ	シ
	24	5600	283

【解説】

(1) $3x+4y-3=k$ (k は実数) とおくと、
$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{k+3}{4}$$
となる。この方程式の表す直線を l とし、 $x^2+y^2\leq 4, x\geq 0$ の表す領域と l が共有点をもつように k の値が変化するときの k の最小値、最大値を考える。ここで、 $x^2+y^2\leq 4, x\geq 0$ の表す領域および l を図示すると下図のようになる。



l の y 切片が最小となるとき k の値も最小となり、 l の y 切片が最大となるとき k の値も最大となる。よって、 l の傾きは $-\frac{3}{4}(<0)$ より、 k の値が最小となるのは上図より l が点 $(0, -2)$ を通るときであるから、 $3x+4y-3$ の最小値は

$$3\cdot 0+4\cdot (-2)-3=-11$$

である。また、 k の値が最大となるのは l が第1象限で円 $x^2+y^2=4$ と接するときであり、このとき上図より $\frac{k+3}{4}>0$ かつ l と原点との距離は2となる。よって、

$$\frac{|3\cdot 0+4\cdot 0-k-3|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$

$$\Leftrightarrow |k+3|=10$$

$$\therefore k=7\left(\because \frac{k+3}{4}>0\right)$$

より $3x+4y-3$ の最大値は7である。次に、 $3x^2+4xy-3y^2$ の最大値を考える。

$x^2+y^2\leq 4, x\geq 0$ を満たす実数 x, y は $0\leq r\leq 2, -\frac{\pi}{2}\leq \theta\leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数 r, θ を用いて

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$$

と表せる。このとき、

$$\begin{aligned} 3x^2+4xy-3y^2 &= 3r^2\cos^2\theta+4r^2\sin\theta\cos\theta-3r^2\sin^2\theta \\ &= r^2(2\sin 2\theta+3\cos 2\theta) \\ &= \sqrt{13}r^2\sin(2\theta+\alpha) \end{aligned}$$

と変形できる。ただし、 α は $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}, \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}$ を満たす実数である。ここで、

$$-\frac{\pi}{2}\leq \theta\leq \frac{\pi}{2} \text{ より } -\pi+\alpha\leq 2\theta+\alpha\leq \pi+\alpha \text{ であるから}$$

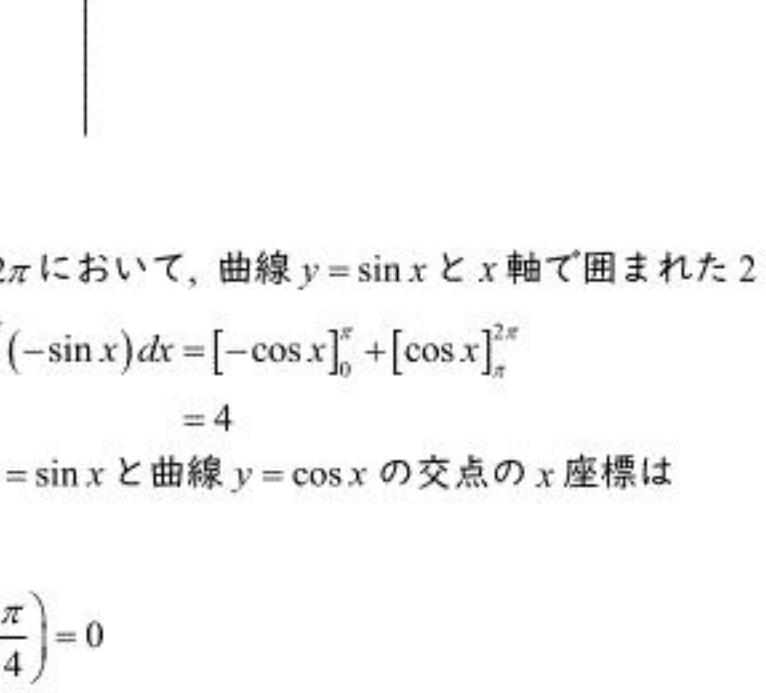
$$-1\leq \sin(2\theta+\alpha)\leq 1$$

である。したがって、これと $0\leq r\leq 2$ より

$$\sqrt{13}r^2\sin(2\theta+\alpha)\leq 4\sqrt{13}$$

であるから、 $3x^2+4xy-3y^2$ の最大値は $4\sqrt{13}$ である。

(2) $0\leq x\leq 2\pi$ において、曲線 $y=\sin x$ と x 軸で囲まれた部分は下図の斜線部分のようになる。



したがって、 $0\leq x\leq 2\pi$ において、曲線 $y=\sin x$ と x 軸で囲まれた2つの部分の面積の和は

$$\int_0^\pi \sin x dx + \int_\pi^{2\pi} (-\sin x) dx = [-\cos x]_0^\pi + [\cos x]_\pi^{2\pi} = 4$$

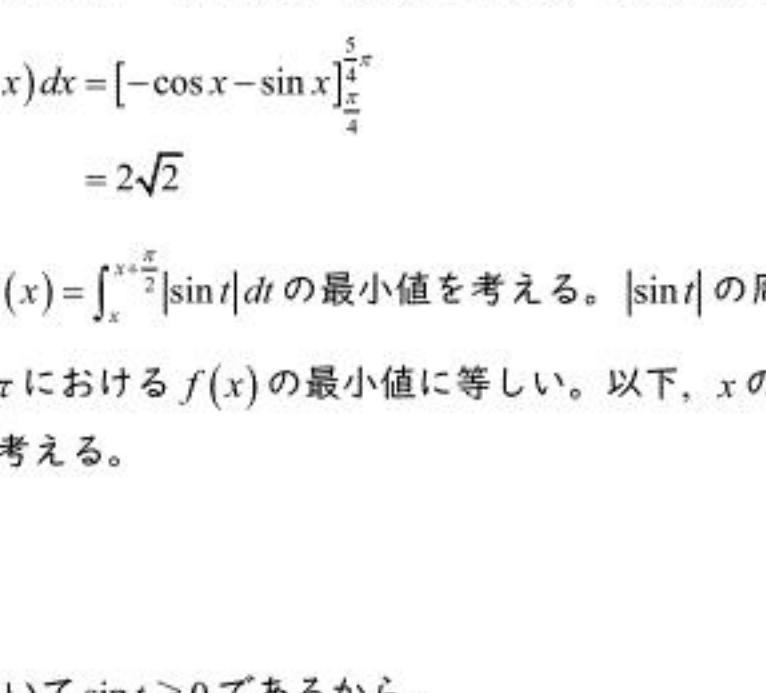
である。また、曲線 $y=\sin x$ と曲線 $y=\cos x$ の交点の x 座標は

$$\sin x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\therefore x=\frac{\pi}{4}+k\pi \text{ (} k \text{ は整数)}$$

であるから、 $0\leq x\leq 2\pi$ において、曲線 $y=\sin x$ と曲線 $y=\cos x$ で囲まれた部分は下図の斜線部分のようになる。



したがって、 $0\leq x\leq 2\pi$ において、曲線 $y=\sin x$ と曲線 $y=\cos x$ で囲まれた部分の面積は

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx = [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = 2\sqrt{2}$$

である。次に、関数 $f(x)=\int_x^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt$ の最小値を考える。 $|\sin t|$ の周期は π であるから、求める最小値は $0\leq x<\pi$ における $f(x)$ の最小値に等しい。以下、 x の値の範囲で場合分けをして $f(x)$ の最小値を考える。

[1] $0\leq x\leq \frac{\pi}{2}$ のとき

$$x\leq t\leq x+\frac{\pi}{2} \text{ において } \sin t\geq 0 \text{ であるから、}$$

$$f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \sin t dt = [-\cos t]_x^{x+\frac{\pi}{2}} = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{である。よって、} 0\leq x\leq \frac{\pi}{2} \text{ において } f(x) \text{ は } x=0, \frac{\pi}{2} \text{ で最小値} 1 \text{ をとる。}$$

[2] $\frac{\pi}{2}\leq x<\pi$ のとき

$$x\leq t\leq \pi \text{ において } \sin t\geq 0 \text{ であり、} \pi\leq t\leq x+\frac{\pi}{2} \text{ において } \sin t\leq 0 \text{ であるから、}$$

$$f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt = \int_x^\pi \sin t dt + \int_\pi^{x+\frac{\pi}{2}} (-\sin t) dt = [-\cos t]_x^\pi + [\cos t]_\pi^{x+\frac{\pi}{2}} = 1 + \cos x - \sin x + 1 = 2 + \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{である。よって、} \frac{\pi}{2}\leq x<\pi \text{ において } f(x) \text{ は } x=\frac{3}{4}\pi \text{ で最小値 } \sqrt{2}-1 \text{ をとる。}$$

以上、[1], [2] より、関数 $f(x)$ の最小値は $\sqrt{2}-1$ である。

(3) $\overline{AB}=(3, 1, 2), \overline{AC}=(-1, 3, 1)$ より

$$|\overline{AB}|^2=3^2+1^2+2^2=14$$

$$|\overline{AC}|^2=(-1)^2+3^2+1^2=11$$

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=3\cdot(-1)+1\cdot 3+2\cdot 1=2$$

であるから、三角形 ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overline{AB}|^2|\overline{AC}|^2-(\overline{AB}\cdot\overline{AC})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{14\cdot 11-2^2} = \frac{5}{2}\sqrt{6}$$

である。ここで、点 H は三角形 ABC 上にあるから、 $\overline{OH}$ は実数 s, t を用いて

$$\begin{aligned} \overline{OH} &= s\overline{OA}+t\overline{OB}+(1-s-t)\overline{OC} \\ &= (s+4t-2, -3s-2t+2, -s+t) \end{aligned}$$

と表せる。このとき

$$\begin{aligned} \overline{DH} &= \overline{OH}-\overline{OD} \\ &= (s+4t-3, -3s-2t+2, -s+t-5) \end{aligned}$$

であり、 $\overline{DH}\perp\overline{AB}, \overline{DH}\perp\overline{AC}$ であるから、

$$\begin{cases} \overline{DH}\cdot\overline{AB}=0 \\ \overline{DH}\cdot\overline{AC}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s+4t-3, -3s-2t+2, -s+t-5)\cdot(3, 1, 2)=0 \\ (s+4t-3, -3s-2t+2, -s+t-5)\cdot(-1, 3, 1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2s+12t-17=0 \\ -11s-9t+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow (s, t)=\left(-\frac{7}{10}, \frac{13}{10}\right)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \overline{OH} &= \left(-\frac{7}{10}+4\cdot\frac{13}{10}-2, -3\cdot\left(-\frac{7}{10}\right)-2\cdot\frac{13}{10}+2, -\left(-\frac{7}{10}\right)+\frac{13}{10}\right) \\ &= \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 2\right) \end{aligned}$$

より点 H の座標は $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 2\right)$ であり、 $\overline{DH}=\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -3\right)$ より

$$|\overline{DH}|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+(-3)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{6}$$

である。以上より、四面体 $ABCD$ の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot S\cdot |\overline{DH}| = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{6}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{6} = \frac{15}{2}$$

である。

(4) 2052 を素因数分解すると $2052=2^2\cdot 3^3\cdot 19$ であるから、2052 の正の約数は全部で $(2+1)(3+1)(1+1)=24$ (個) あり、2052 の正の約数の総和は

$$(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)(1+19)=5600$$

である。ここで、任意の正の整数 n は素数 $p_1, p_2, \dots, p_k (2\leq p_1<p_2<\dots<p_k, k$ は正の整数) と0以上の整数 $a_1, a_2, \dots, a_k$ を用いて $n=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot\dots\cdot p_k^{a_k}$

と表せ、このとき、 n の正の約数の個数は全部で $(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_k+1)$ (個)

ある。よって、 n の正の約数の個数が奇数となるのは、 $a_1, a_2, \dots, a_k$ がすべて偶数であるとき、つまり n が平方数となるときのみである。したがって、

$$17^2<300<18^2$$

より、300以下の正の整数のうち平方数は17個あるから、正の約数の個数が偶数であるものは全部で

$$300-17=283 \text{ (個)}$$

ある。

【2】

(1)

$k \geq 2$ を満たすすべての整数 k に対して、 $x > 0$ において

$$x \leq k \Leftrightarrow \frac{1}{k} \leq \frac{1}{x}$$

であり、 $k-1 \leq x \leq k$ においてこの等号は常には成り立たないため、

$$\begin{aligned} \int_{k-1}^k \frac{1}{k} dx &< \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx \\ \Leftrightarrow \left[\frac{1}{k} x \right]_{k-1}^k &< [\log x]_{k-1}^k \\ \therefore \frac{1}{k} &< \log k - \log(k-1) \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、 $n \geq 2$ を満たすすべての整数 n に対して

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} &< \sum_{k=2}^n \{\log k - \log(k-1)\} \\ &= \log n - \log 1 \\ &= \log n \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1 \cdot (1+x) - x \cdot 1}{(1+x)^2} - \frac{2}{1+x} \\ &= \frac{x^2}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

より、 $x > 0$ において $f'(x) > 0$ である。よって、 $x > 0$ において $f(x)$ は単調に増加し、

$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$ であるから、すべての正の実数 x に対して $f(x) > 0$ が成り立つ。

(証明終)

また、すべての正の整数 n に対して $\frac{1}{n} > 0$ であるから、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n}\right) &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} - 2 \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} &> 2 \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

(2)の結果より、すべての正の整数 k に対して

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} &> 2 \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right) &> \log(k+1) - \log k \end{aligned}$$

が成り立つから、

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right) > \sum_{k=1}^{n-1} \{\log(k+1) - \log k\}$$

が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

であり、

$$\sum_{k=1}^{n-1} \{\log(k+1) - \log k\} = \log n - \log 1 = \log n$$

である。以上より、 $n \geq 2$ を満たすすべての整数 n に対して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right) &> \sum_{k=1}^{n-1} \{\log(k+1) - \log k\} \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) &> \log n \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

【3】

箱 A に入っている赤玉の個数が 2 個, 1 個, 0 個である事象をそれぞれ P, Q, R とすると,
 P のとき箱 A には赤玉 2 個, 白玉 1 個, 箱 B には白玉 3 個
 Q のとき箱 A, B にはいずれも赤玉 1 個, 白玉 2 個
 R のとき箱 A には白玉 3 個, 箱 B には赤玉 2 個, 白玉 1 個
が入っている。

(1)

初めの状態は P より, 1 回目の操作で箱 B から取り出した玉は必ず白玉であるから, 1 回目の操作で箱 A から取り出した玉が白玉のとき P となり, 赤玉のとき Q となる。よって, 求める確率 p_1, q_1 は

$$p_1 = \frac{1}{3}, q_1 = \frac{2}{3}$$

である。また, 1 回目の操作を終えたとき P である場合, 2 回目の操作を終えたとき P, Q となる確率は, 上の議論と同様に考えるとそれぞれ $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ である。一方で, 1 回目の操作を終えたとき Q である場合, 2 回目の操作を終えたとき P となるのは箱 A から白玉, 箱 B から赤玉を取り出したときであり, Q となるのは箱 A, B から取り出した玉の色が同じときであるから, P, Q となる確率はそれぞれ

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}, \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

である。よって, 求める確率 p_2, q_2 は

$$p_2 = \frac{1}{3} p_1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} q_1 = \frac{7}{27}$$
$$q_2 = \frac{2}{3} p_1 + \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right\} q_1 = \frac{16}{27}$$

である。また, 2 つの箱 A, B に入っている赤玉の個数の総数は 2 個であるから, P, Q, R 以外の状態になることはない。したがって, 正の整数 n に対し, r_n は

$$p_n + q_n + r_n = 1$$
$$\Leftrightarrow r_n = 1 - p_n - q_n$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad p_1 = \frac{1}{3}, q_1 = \frac{2}{3}, p_2 = \frac{7}{27}, q_2 = \frac{16}{27}, r_n = 1 - p_n - q_n$$

(2)

(1)と同様に考えると, n 回目の操作を終えたとき P である場合, $n+1$ 回目の操作を終えたとき P, Q となる確率はそれぞれ $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ であり, n 回目の操作を終えたとき Q である場合, $n+1$ 回目の操作を終えたとき P, Q となる確率はそれぞれ $\frac{2}{9}, \frac{5}{9}$ であり, n 回目の操作を終えたとき R である場合, $n+1$ 回目の操作を終えたとき P, Q となる確率はそれぞれ $0, \frac{2}{3}$ である。したがって, 正の整数 n に対し, p_{n+1}, q_{n+1} はそれぞれ

$$p_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{2}{9} q_n$$
$$q_{n+1} = \frac{2}{3} p_n + \frac{5}{9} q_n + \frac{2}{3} r_n$$
$$= \frac{2}{3} p_n + \frac{5}{9} q_n + \frac{2}{3} (1 - p_n - q_n)$$
$$= -\frac{1}{9} q_n + \frac{2}{3}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad p_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{2}{9} q_n, q_{n+1} = -\frac{1}{9} q_n + \frac{2}{3}$$

(3)

(2)の結果より

$$q_{n+1} = -\frac{1}{9} q_n + \frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow q_{n+1} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{9} \left(q_n - \frac{3}{5} \right)$$

となるから, (1)の結果より数列 $\left\{ q_n - \frac{3}{5} \right\}$ は初項 $q_1 - \frac{3}{5} = \frac{1}{15}$, 公比 $-\frac{1}{9}$ の等比数列である。したがって, 数列 $\{q_n\}$ の一般項は

$$q_n - \frac{3}{5} = \frac{1}{15} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$
$$\Leftrightarrow q_n = \frac{3}{5} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{9}\right)^n \right\}$$

である。

$$(\text{答}) \quad q_n = \frac{3}{5} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{9}\right)^n \right\}$$

(4)

(2), (3)の結果より

$$p_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{5} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{9}\right)^n \right\}$$
$$\Leftrightarrow 3^{n+1} p_{n+1} = 3^n p_n + \frac{2}{5} \left\{ 3^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right\}$$
$$\Leftrightarrow s_{n+1} - s_n = \frac{2}{5} \left\{ 3^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right\}$$

と変形できる。よって, $n \geq 2$ のとき

$$s_n = s_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (s_{k+1} - s_k)$$
$$= 3p_1 + \frac{2}{5} \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 3^k - \left(-\frac{1}{3}\right)^k \right\}$$
$$= 1 + \frac{2}{5} \sum_{k=1}^{n-1} 3^k - \frac{2}{5} \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{3}\right)^k$$
$$= 1 + \frac{2}{5} \cdot 3 \cdot \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} - \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{3^n}{5} + \frac{3}{10} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

となる。 $s_1 = 3p_1 = 1$ よりこれは $n=1$ のときも成り立つ。したがって, 数列 $\{s_n\}$ の一般項は

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{3^n}{5} + \frac{3}{10} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

であり, 数列 $\{p_n\}$ の一般項は

$$p_n = \frac{s_n}{3^n}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{5} + \frac{3}{10} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^n$$

である。

$$(\text{答}) \quad s_n = \frac{1}{2} + \frac{3^n}{5} + \frac{3}{10} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n, p_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{5} + \frac{3}{10} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^n$$