

(平 8 前)

数 学

(理 科 系)

(1～5 ページ)

注 意

- 1 問題は 1～5 ページ。2 ページの次の白紙(2 枚)は下書き用紙である。
- 2 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

1. O を原点とする平面上において、点 A は半円 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ ($y < 0$) 上にある。点 B は $2OA = OB$ をみたし、 y 軸上の正の部分にあるとする。このとき、次の各問に答えよ。

(1) $\angle AOB = \theta$ とするとき、2点 A , B の座標を θ を用いて表せ。

(2) 線分 AB と x 軸の交点を C とする。点 A を点 O に近づけると、 $\frac{OC}{AB^2}$ の極限値を求めよ。

2. 数列 $\{a_n\}$ は次の関係をみたす。

$$a_1 = 0,$$

$$a_n \sin \theta + a_{n+1} \cos \theta = \sin \theta \cdot \cos \theta \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ただし、 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。このとき、次の各問に答えよ。

(1) a_n を n と θ を用いて表わせ。

(2) $n \rightarrow \infty$ のとき、数列 $\{a_n\}$ が収束するような θ の範囲と、そのときの極限值 $f(\theta)$ を求めよ。

(3) θ が (2) で求めた範囲を動くとき、 $f(\theta)$ の値の範囲を求めよ。

3. 数列 $\{f_n\}$ は次の性質 (i), (ii), (iii) をもつとする。

(i) $f_1 = 0$

(ii) i, j が正の整数であるとき、積 ij に対して

$$f_{ij} = f_i + f_j$$

(iii) i, j が $i < j$ をみたす正の整数であるとき

$$f_i < f_j$$

このとき、次の各問に答えよ。

(1) r, s が正の整数であるとき、整数 s^r に対して

$$f_{s^r} = r f_s$$

が成り立つことを示せ。

(2) k, l をいずれも 2 以上の整数とし、正の整数 N に対して

$$l^m < k^N \leq l^{m+1}$$

をみたす 0 以上の整数 m をとる。次の不等式

$$\frac{m}{N} < \frac{f_k}{f_l} \leq \frac{m+1}{N}$$

が成り立つことを示せ。

4. 点 P は x 軸上を、負の方向から原点を通過し、正の方向に動くとする。時刻 t (秒)における、点 P の位置を表す関数を $x(t)$ とし、点 P の速度を表す関数を $v(t)$ とする。ただし、 $x(t)$ 、 $v(t)$ は各時刻で連続とする。

$x(t) < 0$ のとき、点 P の運動は次の微分方程式

$$\frac{dv(t)}{dt} = 32 - 2v(t)$$

をみたし、 $x(t) > 0$ のとき、点 P の運動は次の微分方程式

$$\frac{dv(t)}{dt} = 24 - 6v(t)$$

をみたす。このとき、次の各問に答えよ。

- (1) $v(0) = 0$ 、 $x(0) = -50$ とする。 m 秒から $m + 1$ 秒の間に、動点 P は原点に到達する。このような整数値 m を求めよ。

- (2) 原点を通過した後、 n 秒から $n + 1$ 秒の間に、動点 P は $x = 10$ の点を通過する。このような整数値 n を求めよ。ただし、P が原点を通過する速度は $15.9886\cdots$ であるが、計算上 16 としてよい。

5. ある人が次のゲームを行う。1から5までの数が1つずつ書かれたカードが計5枚入った袋がある。正三角形ABCの頂点Bを出発点にして、袋から1枚のカードを取り出すごとに、そのカードに書かれた数だけBCAB……の順に頂点を移動する。ただし、取り出したカードはすぐにもとの袋に戻し、よくかき混ぜるとする。ちょうど頂点Aに移動すれば、上がりとなりゲームは終了する。

例えば、頂点Bにいるとき1または4のカードが出れば頂点Cに移動し、また頂点Cにいるとき2または5のカードが出れば頂点Bに移動する。頂点Bにいるとき、2または5のカードが出れば頂点Aに移動し、ゲームは終了する。

n 回以下の試行でゲームが上がりとなる確率を a_n とする。また、 n 回の試行を終えたときに、ちょうど頂点Bにいる確率を b_n 、ちょうど頂点Cにいる確率を c_n とする。このとき、次の各問に答えよ。

(1) a_2, b_2, c_2 を求めよ。

(2) $n \geq 2$ のとき、 $b_n + c_n, b_n - c_n$ を b_{n-1}, c_{n-1} を用いて表せ。

(3) a_n, b_n, c_n を n で表せ。