

(平 9 前)

数 学

(理 科 系)

(1 ~ 5 ページ)

注 意

- 1 問題は 1 ~ 5 ページ。2 ページの次の白紙(2 枚)は下書き用紙である。
- 2 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。
- 3 問題 3 は選択問題である。選択した問題番号を答案用紙の指定した枠内に記入しなさい。

1. 3次関数 $f(x) = ax^3 + (a - 2)x$ ($a > 0$) について、次の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ が極値をもつような a の値の範囲を求めよ。

(2) $y = f(x)$ が極値をもつとき、極大値と極小値の差が $2|a - 2|$ と等しくなるような a の値を求めよ。

2. $2n$ 個の白玉と n 個の赤玉をでたらめに並べる。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 直線上に並べるときに赤玉どうしが隣り合わない確率を求めよ。

(2) 円周状に並べるときに赤玉どうしが隣り合わない確率を求めよ。

3. 次の3Aと3Bのいずれかを選択して答えよ。

3A. 平面上の相異なる2点A, Bは原点Oと異なり, 3点O, A, Bは同一直線上にないとする。ここで, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。平面上の一次変換 f が条件

$$f(\vec{a}) = \vec{a}, f(\vec{b}) = 3\vec{a} + 2\vec{b}$$

をみたすとき, 次の問いに答えよ。

(1) $f(t\vec{a} + \vec{b}) // t\vec{a} + \vec{b}$ をみたすような実数 t を求めよ。

(2) 点Aを通り, 原点を通らない直線 l であって, 変換 f によって l の点がすべて l の点にうつされるような直線 l の方程式を求めよ。

3B. 複素数平面上において, 複素数 $0, 2, z, z^2$ を表す点を, それぞれO, A, B, Cとする。3点O, A, Bが三角形の頂点をなすとき, 次の問いに答えよ。

(1) $\triangle OAB$ が直角三角形になるとき, 点Bは複素数平面上でどのような図形上にあるかを図示せよ。

(2) $\triangle OAB$ が直角三角形であり, かつ, $\angle AOC$ が直角になるときの z を求めよ。

4. 数列 $\{a_n\}$ は

$$0 < a_1 < 3, \quad a_{n+1} = 1 + \sqrt{1 + a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

をみたすものとする。このとき、次の (1), (2), (3) を示せ。

(1) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $0 < a_n < 3$ が成り立つ。

(2) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $3 - a_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (3 - a_1)$ が成り立つ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

5. 曲線 $y = \sqrt{1-x^2}$ を C_1 , 曲線 $y = \frac{1}{1+x^2}$ を C_2 とし, C_1 と C_2 の $(x, y) = (0, 1)$ 以外の交点の x 座標を $\pm a$ ($a > 0$) とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) a^2 の値を求めよ。

(2) $0 \leq x \leq a$ で2つの曲線 C_1 , C_2 に囲まれた部分の面積を S_1 とする。また, $a \leq x \leq 1$ で2つの曲線 C_1 , C_2 と直線 $x = 1$ に囲まれた部分の面積を S_2 とする。 S_1 と S_2 の大小を判定せよ。