

(平 10 前)

# 数 学

(理 科 系)

(1 ～ 5 ページ)

## 注 意

- 1 問題は 1 ～ 5 ページ。2 ページの次の白紙(2 枚)は下書き用紙である。
- 2 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。
- 3 問題 3 は選択問題である。選択した問題番号を答案用紙の指定した枠内に記入しなさい。

1. 座標空間内の8点  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(2, 0, 0)$ ,  $B(2, 2, 0)$ ,  $C(0, 2, 0)$ ,  $P(0, 0, 1)$ ,  $Q(2, 0, 1)$ ,  $R(2, 2, 1)$ ,  $S(0, 2, 1)$  を頂点とする直方体を考える. 次の各問に答えよ.

(1)  $D = (x, y, 1)$  を面  $PQRS$  上の点とするときベクトル  $\overrightarrow{OD}$  を  $x, y$  およびベクトル  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OC}$ ,  $\overrightarrow{OP}$  を用いて表せ.

(2) ベクトル  $\overrightarrow{OD}$  がベクトル  $\overrightarrow{CQ}$  と直交するための条件を  $x, y$  を用いて表せ.

(3)  $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{CQ}$  である  $D$  の中で  $|\overrightarrow{OD}|$  が最小となるような  $D$  を与える  $x, y$  の値を求めよ.

2.  $0 < a < 4$  とし、座標平面上の4点  $(0, 0)$ ,  $(a, 0)$ ,  $(a, 4-a)$ ,  $(0, 4-a)$  を頂点とする長方形の内部を  $I_a$  とする.  $y \leq \frac{1}{x}$  をみたす  $I_a$  の点  $(x, y)$  全体のなす図形の面積を  $S(a)$  とするとき、次の各問に答えよ.

(1)  $S(a)$  を  $a$  を用いて表せ.

(2)  $S(a)$  の最大値を求めよ.

3. 次の 3 A または 3 B を選択して解答せよ.

3 A. 行列  $\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$  によって表される一次変換  $f$  によって, 平面全体が直線  $y = mx$  ( $m \neq 0$ ) に移されているとき, 次の各問に答えよ.

- (1)  $a, b$  を  $m$  を用いて表し, 原点を中心とする半径 1 の円周は  $f$  によりどんな線分に移されるか答えよ.
- (2) (1) で求めた線分の長さを最小にする  $m$  の値と, そのときの線分の長さを求めよ.

3 B. 次の各問に答えよ.

(1)  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ ,  $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  とおくとき  $AB_1 - B_1A$  と  $AB_2 - B_2A$  を計算せよ.

- (2)  $3 \times 3$  行列  $A$  で, 任意の  $3 \times 3$  行列  $B$  に対して  $AB = BA$  をみたすものをすべて求めよ.

4.  $0 < x < \frac{1}{2}$  とする. 一辺の長さが 1 の正方形の紙の 4 つのすみから一辺の長さが  $x$  の正方形を切り取りふたのない箱  $A$  を作る. さらに, 切り取った一辺の長さが  $x$  の正方形の 4 つのすみをそれぞれ切り取り,  $A$  と相似なふたのない箱  $B_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) を作る. 次の各問に答えよ.

(1) 箱  $A$  の容積  $f(x)$  を最大にする  $x$  の値  $a$  を求めよ.

(2) 箱  $B_1$  の容積  $g(x)$  を最大にする  $x$  の値  $b$  を求めよ.

(3) 方程式  $f'(x) + 4g'(x) = 0$  が区間  $a < x < b$  に解を持つことを示せ.

5. A 地点から B 地点まで 0 または 1 の一文字からなる信号を送る. A 地点と B 地点の間に中継点を  $2n - 1$  箇所作り AB 間を  $2n$  個の小区間に分割すると, 一つの区間において 0 と 1 が逆転して伝わる確率は  $\frac{1}{4n}$  である. このとき A 地点を発した信号 0 が B 地点に 0 として伝わる確率を  $P_{2n}$  とする. 次の各問に答えよ.

(1) 偶数回の逆転があると, A 地点を発した信号 0 が B 地点に 0 として伝わることに注意して  $P_2$  を求めよ.

(2)  $(a + b)^{2n} + (a - b)^{2n} = 2 \sum_{k=0}^n {}_{2n}C_{2k} a^{2n-2k} b^{2k}$  を示せ.

(3)  $P_{2n}$  を求めよ.

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n}$  を求めよ.