

(平 11 前)

数 学

(理 科 系)

(1 ～ 5 ページ)

注 意

- 1 問題は 1 ～ 5 ページ。2 ページの次の白紙(2 枚)は下書き用紙である。
- 2 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

1. $0 < a < \frac{\pi}{2}$ とし、関数 $f(x)$ を

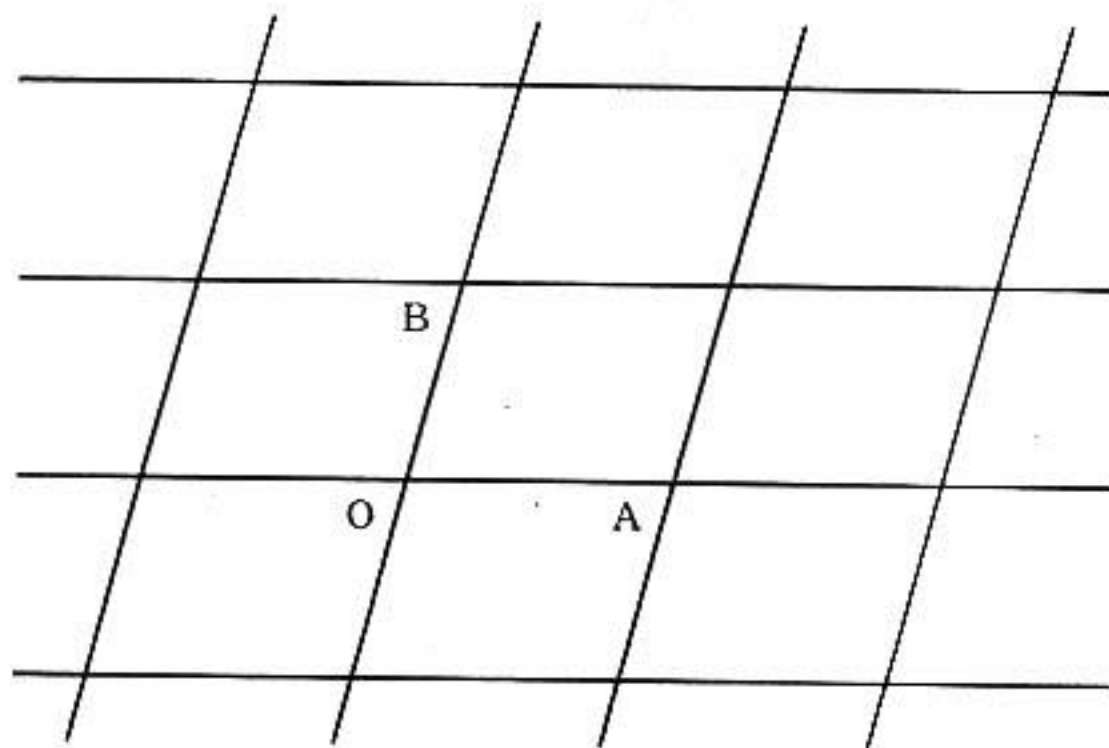
$$f(x) = |x - a| \sin x \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

とする。 $y = f(x)$ のグラフと、 x 軸および直線 $x = \frac{\pi}{2}$ で囲まれた 2 つの図形の面積の和を S とするとき、次の各問に答えよ。

(1) S を a を用いて表せ。

(2) a が $0 < a < \frac{\pi}{2}$ の範囲で動くときの S の最小値を求めよ。

2. 合同な平行四辺形を平面にしきつめて、図のように2組の平行線からなる格子を作り、その各交点を格子点と呼ぶ。



図のような3つの格子点 O , A , B について $|\overrightarrow{OA}|^2$, $|\overrightarrow{OB}|^2$, $|\overrightarrow{AB}|^2$ はすべて整数であるとする。このとき、どの2つの格子点 P, Q に対しても $|\overrightarrow{PQ}|^2$ は整数となること示せ。

3. m は実数とし、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = (x^2 - x + m) \sin 3\pi x \quad (0 < x < 1)$$

とする。このとき $f(a) = 0$ となる a ($0 < a < 1$) のうち、 $x = a$ を境目にして関数 $f(x)$ の符号が変化するものの個数を求めよ。

4. 連立不等式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{3}$, $x > 3$, $y > 3$ の表す領域を D とする。このとき次の各問に答えよ。

(1) D を図示せよ。

(2) D 内を (x, y) が動くとき $2x + y$ のとる値の最小値を求めよ。また、そのときの x, y の値を求めよ。

5. t は -1 , 0 , 1 のいずれとも異なる実数とする。行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} t^2 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくとき、次の各問に答えよ。

(1) 3×3 行列 X で $AX = tXA$ をみたすものをすべて求め、 X^3 が零行列となることを示せ。

(2) X は $AX = tXA$ をみたす 3×3 行列であるとする。2 以上の自然数 n に対して

$$(X + A)^n = A^n + b_n X A^{n-1} + c_n X^2 A^{n-2}$$

と書けることを示し、 b_{n+1} , c_{n+1} を b_n , c_n を用いて表せ。ただし A^0 は 3 次の単位行列を表すものとする。