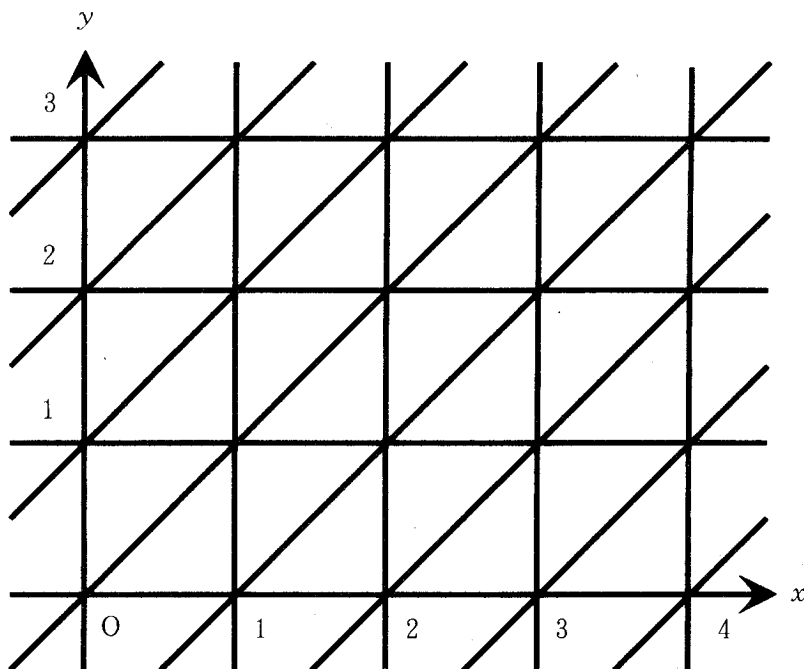
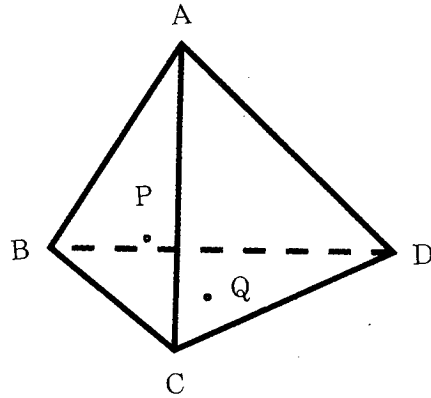


1. xy 平面全体が下図のような直線の配列で埋められているとする。



このとき、点 $A(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ と $P(m + \frac{2}{3}, n + \frac{1}{3})$ について、 A から P に至るのに横切らなければならない直線の本数の最小値を m と n を用いて表せ。
ただし、 m, n は負でない整数であるとする。

2. 四面体 ABCD を考える。



面 ABC 上の点 P と面 BCD 上の点 Q について、

$$\overrightarrow{AP} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AQ} = s \overrightarrow{AB} + t \overrightarrow{AC} + u \overrightarrow{AD}$$

とおくとき、 $x:y = s:t$ ならば、線分 AQ と DP が交わることを示せ。

3. 二つの関数

$$f(x) = x(1-x), \quad g(x) = \frac{2x}{2+x}$$

を用いて、数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を

$$0 < a_0 = b_0 < \frac{1}{2}$$

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad b_{n+1} = g(b_n), \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

によって定める。次の問いに答えよ。

- (1) $0 < x < \frac{1}{2}$ において、 $f(x)$ は単調増加であることを示せ。

また $x > 0$ のとき、

$$f(x) < g(x) < x$$

であることを示せ。

- (2) $n = 1, 2, \dots$ に対して、 $0 < a_n < b_n < \frac{1}{2}$ であることを示せ。

- (3) b_n を求めよ。

4. 関数

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{6} - 2 \sin x}$$

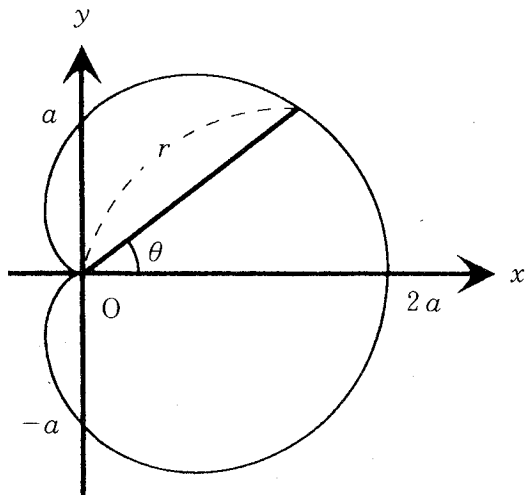
を考える。 $0 \leq x \leq 2\pi$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の導関数を求めよ。
- (2) $f(x)$ の最小値を求めよ。またその最小値を与える x に対して、 $\cos x$ の値を求めよ。
- (3) $y = f(x)$ のグラフの x 軸より下方にある部分と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

5. $a > 0$ を定数として、極方程式

$$r = a(1 + \cos\theta)$$

により表される曲線 C_a を考える。



次の問いに答えよ。

- (1) 極座標が $(\frac{a}{2}, 0)$ の点を中心とし半径が $\frac{a}{2}$ である円 S を、極方程式で表せ。
- (2) 点 O と曲線 C_a 上の点 $P \neq O$ とを結ぶ直線が円 S と交わる点を Q とするとき、線分 PQ の長さは一定であることを示せ。
- (3) 点 P が曲線 C_a 上を動くとき、極座標が $(2a, 0)$ の点と P との距離の最大値を求めよ。