

1. 行列 A 、 B を

$$A = \begin{pmatrix} k & 4 \\ -1 & k-4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

とする。次の間に答えよ。

(1) A の逆行列が存在しないような k の値を求めよ。

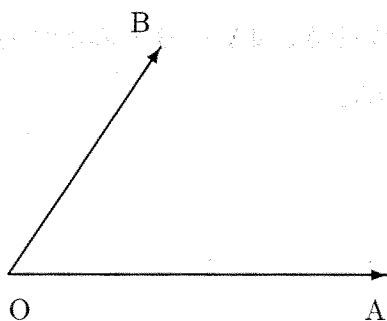
(2) A の逆行列が存在するとき、 $AX = B$ となる $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ を a 、 b 、 k を用いて表わせ。

(3) A の逆行列が存在しないとき、 $AX = B$ をみたす 行列 X があるような a 、 b の値を求めよ。

2. 3点 O 、 A 、 B は、一直線上にない点とし、 $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$ とする。また、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく。このとき次の問に答えよ。

(1) 点 P を $\overrightarrow{BP} = t\overrightarrow{BC}$ (t は実数) をみたす点とする。このとき、 $\overrightarrow{OP}$ を、 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 t であらわせ。

(2) 点 Q を $\overrightarrow{OQ} = 2s\overrightarrow{OA}$ (s は実数) をみたす点とする。 P と Q の中点を M とする。 t 、 s が $0 \leq t \leq 1$ 、 $0 \leq s \leq 1$ をみたしながら変化するとき、点 M の存在する範囲を図示せよ。



3. 次の問に答えよ。

- (1) a, b, c を整数とする。 x に関する 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ が有理数の解をもつならば、その解は整数であることを示せ。ただし、正の有理数は 1 以外の公約数をもたない 2 つの自然数 m, n を用いて $\frac{n}{m}$ と表せることを用いよ。
- (2) 方程式 $x^3 + 2x^2 + 2 = 0$ は、有理数の解をもたないことを背理法を用いて示せ。

4. 関数

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{\log x}{x} \quad (x > 0)$$

を考える。次の問に答えよ。ただし、 e は自然対数 $\log x$ の底である。

- (1) $f(x)$ の極値と変曲点を求め、グラフの概形を描け。ここで

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ を用いてよい。また、グラフと座標軸との交点の座標は求めなくてよい。

- (2) 定積分 $\int_{\frac{1}{e}}^e f(x) dx$ の値を求めよ。

5. 白球 3 個、赤球 2 個、青球 1 個 合計 6 個の球の入っている袋がある。最初に A 君が、次のルール (i)、(ii) に従って 袋から球を 1 個または 2 個取り出す。次に B 君が同じルールに従って、袋に残った球を 1 個または 2 個取り出す。ただし、いったん取り出した球は元の袋には戻さないものとする。

(i) 取り出した 1 個目が赤球ならば、2 個目を取り出すことはできない。

(ii) 取り出した 1 個目が赤球以外ならば、さらに 1 個だけ取り出す。

白球は 1 点、赤球は 2 点、青球は 3 点とし、取り出した球の合計点を各自の得点とする。このとき次の間に答えよ。

(1) A 君と B 君の得点が同じになる確率 p_1 を求めよ。

(2) A 君の得点が B 君の得点より大きくなる確率 p_2 を求めよ。