

1. 0 でない複素数 z に対して, $w = u + iv$ を

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

とするとき, 次の問に答えよ。ただし, u, v は実数, i は虚数単位である。(配点 30 点)

- (1) 複素数平面上で, z が単位円 $|z| = 1$ 上を動くとき, w はどのような曲線を描くか。 u, v がみたす曲線の方程式を求め, その曲線を図示せよ。
- (2) 複素数平面上で, z が実軸からの偏角 α $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$ の半直線上を動くとき, w はどのような曲線を描くか。 u, v がみたす曲線の方程式を求め, その曲線を図示せよ。

2. 正の整数 n に対して、連立不等式

$$\begin{cases} 0 < x \leq n \\ x \leq y \leq 3x \end{cases}$$

の表す領域を D_n とする。次の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) 領域 D_n 内にある格子点 $P(x, y)$ の個数を S_n とする。 S_n を n で表せ。ただし、格子点とは x 座標と y 座標の両方が整数であるような点のことである。

(2) 原点 $O(0, 0)$ を始点とし、領域 D_n 内の格子点 $P(x, y)$ を終点とする位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$ は、ベクトル

$$\vec{v}_1 = (1, 1), \quad \vec{v}_2 = (1, 2), \quad \vec{v}_3 = (1, 3)$$

と 0 以上の整数 m_1, m_2, m_3 を用いて、

$$\overrightarrow{OP} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3$$

と表せることを証明せよ。

3. 正の実数 a, b に対して, 2つの曲線

$$C_1 : a y^2 = x^3 \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

$$C_2 : b x^2 = y^3 \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

の原点 O 以外の交点を P とする。次の間に答えよ。(配点 30 点)

- (1) 交点 P の座標を求め, 2つの曲線 C_1, C_2 の概形を描け。
- (2) 2つの曲線 C_1, C_2 で囲まれる部分の面積を, a と b で表せ。また, この面積が一定値 S であるように a, b が動くとき, 点 P の軌跡の方程式を求めよ。

4. 関数 $f(x)$ は任意の実数 x に対して定義されているとする。次の間に答えよ。(配点 30 点)

(1) $f(x)$ が $x = a$ において微分可能であることの定義を述べよ。

(2) 次の 2 つの命題のうち正しいものを選び、それが正しい理由を示せ。

(i) $f(x)$ が $x = a$ において連続ならば、必ず、 $f(x)$ は $x = a$ において微分可能である。

(ii) $f(x)$ が $x = a$ において連続であっても、 $f(x)$ は $x = a$ において微分可能であるとは限らない。

(3) 関数 $f(x) = \cos x$ が $x = a$ において微分可能であることを、(1) で答えた定義を用いて証明せよ。

5. 数字 $1, 2, \dots, N$ の書かれたカードが 1 枚ずつ N 枚入っている箱から、元に戻さずに 1 枚ずつ k 枚のカードを引く試行を考える。ここで、 $2 \leq k \leq N$ とする。引いたカードの順に、書かれている数字を $x_1, x_2, \dots, x_k$ とする。次の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) $x_1 < x_2 < \dots < x_k$, すなわち, k 枚のカードを数字の小さい順に引く確率 p を求めよ。

(2) i は整数で, $2 \leq i \leq k$ をみたすとする。

$$\begin{cases} x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} \\ x_{i-1} > x_i \end{cases}$$

である確率, すなわち, k 枚のカードのうち $i-1$ 枚目までは小さい順にカードを引き, i 枚目に初めて $i-1$ 枚目よりも数字の小さいカードを引く確率 q_i を求めよ。

(3) N は 5 以上の整数で, $k = 5$ とする。 $2 \leq i \leq 5$ をみたす各整数 i について上の (2) の事象が起こるとき, 得点 i 点が与えられるとする。それ以外のときの得点は 0 点とする。このとき, 得点の期待値を求めよ。