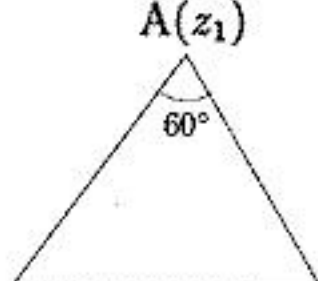


1.

(1) 

AB を A を中心に 60° 回転させると AC に重なるので、

$$(z_2 - z_1)(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = z_3 - z_1$$

$$\therefore \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{1}{\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ}$$

$$= \cos(-60^\circ) + i \sin(-60^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

また、CA を C を中心に 60° 回転させると CB に重なるので、

$$(z_1 - z_3)(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = z_2 - z_3$$

よって

$$\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

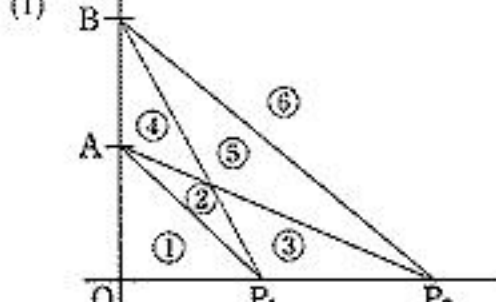
(2) (1) から $(z_2 - z_1) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = z_3 - z_1$

よって、 $(-2 - 2\sqrt{2}i - 2i) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) + 2i = z_3$

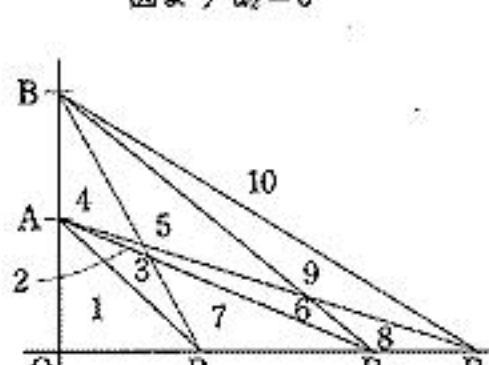
$$\therefore z_3 = -1 - \sqrt{2}i - i - \sqrt{3}i + \sqrt{6} + \sqrt{3} + 2i$$

$$= -1 + \sqrt{6} + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{2} - \sqrt{3})i$$

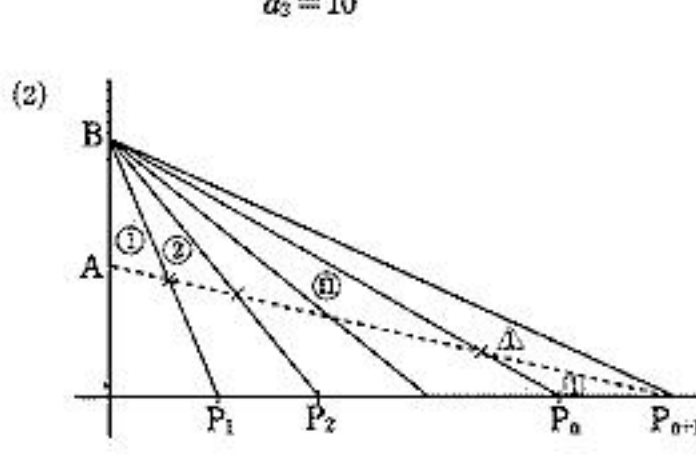
2.



図より $a_2 = 6$



$a_3 = 10$



AP_{n+1} と $BP_1 \sim BP_n$ は各々異なる 1 点

で交わり交点 n 個

A からその交点の 1 つへ至るたびに

今まであった三角形を 2 つに分ける

ので、 n 個ふえ、最後の交点と P_n ,

P_{n+1} で新しい三角形を 1 個つくる。

そして、 BP_{n+1} は $AP_1 \sim AP_{n+1}$, BP_1

$\sim BP_n$ とは交わらないので、新たな

領域は、 BP_n と AP_{n+1} と BP_{n+1} でつ

くる三角形 1 個だけ

よって $a_{n+1} = a_n + n + 2$ となる。

(3) $a_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{3}{2}(n+1)$

$$= a_n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n = \dots = a_1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 3 - 2 = 1$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$$

3.

(1) $f(x) = (x^2 - a^2)(x + 1)$

$$= x^3 + x^2 - a^2x - a^2,$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - a^2$$

α, β は $f'(x) = 0$ の解

$$\alpha + \beta = -\frac{2}{3}$$

$$\alpha\beta = -\frac{a^2}{3}$$

⑦

$(\alpha, f(\alpha))$ と $(\beta, f(\beta))$ を結ぶ直線の

傾きは $\beta > \alpha$ より

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

$$= \frac{\beta^3 - \alpha^3 + \beta^2 - \alpha^2 - a^2(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha}$$

$$= \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + \beta + \alpha - a^2$$

これが $(-1, 0)$ における接線の傾き

$$f'(-1) = 3 - 2 - a^2 = 1 - a^2 \text{ に等しい}$$

ので $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + \alpha + \beta = 1$

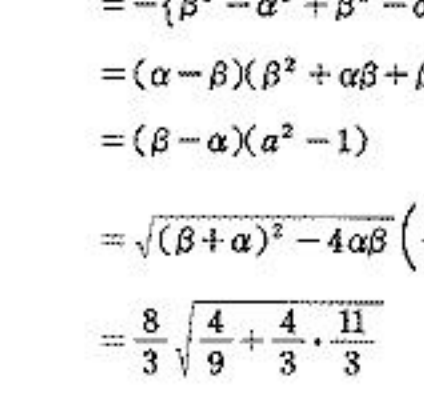
$$\text{よって } (\alpha + \beta)^2 + (\alpha + \beta) - \alpha\beta - 1 = 0$$

⑦より

$$\frac{4}{9} - \frac{2}{3} + \frac{a^2}{3} - 1 = 0$$

$$\therefore a^2 = \frac{11}{3}, \quad a > 1$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{33}}{3}$$



$$S = \int_{\alpha}^{\beta} (-f'(x)) dx$$

$$= -\left\{ \beta^3 - \alpha^3 + \beta^2 - \alpha^2 - a^2(\beta - \alpha) \right\}$$

$$= (\alpha - \beta)(\beta^2 + \alpha\beta + \beta^2 + \beta + \alpha - a^2)$$

$$= (\beta - \alpha)(a^2 - 1)$$

$$= \sqrt{(\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta} \left(\frac{11}{3} - 1 \right)$$

$$= \frac{8}{3} \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{3} \cdot \frac{11}{3}}$$

$$= \frac{8}{3} \sqrt{\frac{48}{9}}$$

$$= \frac{32\sqrt{3}}{9}$$