1.

(1) $z=a$ (a：実数) とすると

$$w=\frac{a-i}{a+i}=\frac{(a-i)^2}{a^2+1}=\frac{a^2-1}{a^2+1}+\frac{-2a}{a^2+1}i$$

$w=x+yi$ とすると

$$x=\frac{a^2-1}{a^2+1},\quad y=\frac{-2a}{a^2+1}$$

$$x=1-\frac{2}{a^2+1}\neq 1$$

$$x^2+y^2=\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)^2+\left(\frac{-2a}{a^2+1}\right)^2=\frac{(a^2+1)^2}{(a^2+1)^2}=1$$

よって w の描く図形は

円 $x^2+y^2=1$ の $(1,\ 0)$ 以外…（答）

（中心0, 0）半径1の円の（1, 0）以外）

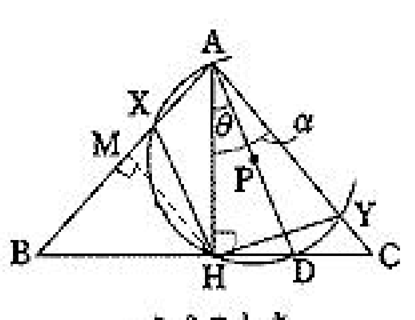
(2) $\dfrac{w_1}{w_2}=\dfrac{z-i}{z+i}\times\dfrac{\bar{z}+i}{\bar{z}-i}=\dfrac{z-i}{z+i}\times\dfrac{\overline{z-i}}{\overline{z+i}}=\dfrac{|z-i|^2}{|z+i|^2}$：実数

よって $aig\left(\dfrac{w_1}{w_2}\right)=0$

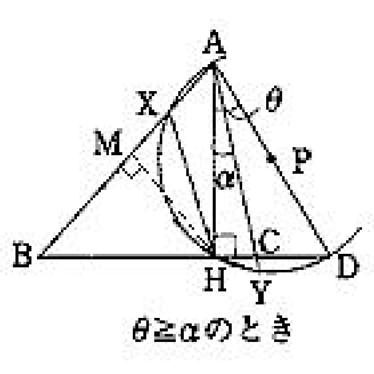
よって，O，P，Q は一直線上。

2.

(1)



$\alpha\geqq\theta$ のとき



$\theta\geqq\alpha$ のとき

直線BCと円の交点をDとする

$\angle AHD=\dfrac{\pi}{2}$ より

ADは直径，$AD=2r$

$\therefore\quad \cos\theta=\dfrac{AH}{AD}=\dfrac{1}{\sqrt{2}r}$

ここで $X\to A$ のとき

$\angle DAB\to\dfrac{\pi}{2}$ より $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

よって $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{1}{2r^2}}$ …㋐

(2) $\angle ADH=\angle AYH=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

$\therefore\quad \angle AHY=\pi-\alpha-\angle AYH=\dfrac{\pi}{2}+\theta-\alpha$

よって △AHYで正弦定理より

$$\begin{aligned}AY&=2r\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta-\alpha\right)\\&=2r\cos(\theta-\alpha)\\&=2r\cos\theta\cos\alpha+2r\sin\theta\sin\alpha\\&=\sqrt{2}\cos\alpha+2r\sqrt{1-\frac{1}{2r^2}}\sin\alpha\ (\because\sqrt{2}r\cos\theta=1\text{と㋐より})\\&=\sqrt{2}\cos\alpha+\sqrt{4r^2-2}\sin\alpha\end{aligned}$$

また $\angle AXH+\angle ADH=\pi$ より
　　($\angle AYH$)

$$\angle AXH=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{2}+\theta$$

$$\therefore\quad \angle AHX=\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\theta+\frac{\pi}{4}\right)\quad\left(\because\angle HAX=\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{\pi}{4}-\theta$$

△AXHで正弦定理より

$$AX=2r\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=2r\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)$$
$$=1-\sqrt{2r^2-1}\quad(\because\sqrt{2}r\cos\theta=1)$$

よって $AX+AY=\sqrt{2}\cos\alpha+1+(\sqrt{2}\sin\alpha-1)\sqrt{2r^2-1}$ …（答）

(3) (2)より $AX+AY$ が r にかかわらず
一定なのは
（このとき $AX+AY$ は　2 で一定）

$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$0<\alpha<\dfrac{3}{4}\pi$ より，

$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ のとき…（答）

3.

(1) $x=0$ のとき $f(x)=\dfrac{1}{18}$

$x>0$ のとき $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{4}x}}{x^2-3x+18}$

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{\frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}x}(x^2-3x+18)-e^{\frac{1}{4}x}(2x+3)}{(x^2-3x+18)^2}\\&=\frac{e^{\frac{1}{4}x}(x^2-3x+18-8x+12)}{4(x^2-3x+18)^2}\\&=\frac{e^{\frac{1}{4}x}(x^2-11x+30)}{4(x^2-3x+18)}\\&=\frac{e^{\frac{1}{4}x}(x-5)(x-6)}{4(x^2-3x+18)^2}\end{aligned}$$

$x<0$ のとき $f(x)=\dfrac{e^{-\frac{1}{4}x}}{x^2-3x+18}$

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}(x^2-3x+18)-e^{-\frac{1}{4}}(2x-3)}{(x^2-3x+18)}\\&=\frac{-e^{-\frac{1}{4}x}(x^2-3x+18+8x-12)}{4(x^2-3x+18)^2}\\&=-\frac{e^{-\frac{1}{4}x}(x^2+5x+6)}{4(x^2-5x+18)^2}\\&=-\frac{e^{-\frac{1}{4}x}(x+2)(x+3)}{4(x^2-3x+18)^2}\end{aligned}$$

以上より

x	…	-3	…	-2	…	0	…	5	…	6	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$\frac{e^{\frac{3}{4}}}{36}$	↗		↘	$\frac{1}{18}$	↗		↘	$\frac{e^{\frac{3}{2}}}{36}$	↗

よって，極小値は

$\dfrac{e^{\frac{3}{4}}}{36}$ $(x=-3)$，$\dfrac{1}{18}$ $(x=0)$，$\dfrac{e^{\frac{3}{2}}}{36}$ $(x=6)$ …（答）

(2) $\dfrac{e^{\frac{3}{2}}}{36}>\dfrac{e^{\frac{3}{4}}}{36}$ は明らか，

$\dfrac{e^{\frac{3}{4}}}{36}$ と $\dfrac{1}{18}$ の大小比較

$\dfrac{e^{\frac{3}{4}}}{36}-\dfrac{1}{18}=\dfrac{1}{36}(e^{\frac{3}{4}}-2)$

$e^{\frac{3}{4}}>0$，$2>0$ より

$(e^{\frac{3}{4}})^4=e^3$ と $2^4=16$ の大小でくら
べる。

$e>2.7$ より，$e^3>2.7^3=19.656$

よって $e^3>2^4$ $\therefore$ $e^{\frac{3}{2}}>2$

よって $\dfrac{e^{\frac{3}{4}}}{36}>\dfrac{1}{18}$

よって最小値 $\dfrac{1}{18}$ ($x=0$ のとき)
…（答）

4.

(1)
$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi}f(x)\sin x\,dx\\&=\int_0^{\pi}f(x)(-\cos x)'\,dx\\&=[-f(x)\cos x]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}f'(x)\cos x\,dx\\&=+f(x)-f(0)+\int_0^{\pi}f'(x)(\sin x)'dx\\&=0+[f'(x)\sin\pi]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f''(x)\sin x\,dx\quad(\because f(\pi)=f(0)=0)\\&=-\int_0^{\pi}f''(x)\sin x\,dx\quad(\because f'(x)\sin\pi=0,\quad f'(0)\sin 0=0)\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}F(a)&=a^2\int_0^{\pi}(f(x))^2\,dx\\&\quad-2a\int_0^{\pi}f(x)\sin x\,dx\\&\quad+\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx\\&=a^2\int_0^{\pi}x^2(x-\pi)^2\,dx\\&\quad+2a\int_0^{\pi}f''(x)\sin x\,dx\\&\quad+\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx\\&=a^2\int_0^{\pi}(x^4-2\pi x^3+\pi^2x^2)\,dx\\&\quad+2a\int_0^{\pi}2\sin x\,dx\\&\quad+\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2\pi}{4}\right]_0^{\pi}\quad(\because\ f'(x)=2)\\&=a^2\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{\pi}{2}x^4+\frac{\pi^2}{3}x^3\right]_0^{\pi}\\&\quad+4a[-\cos x]_0^{\pi}+\frac{\pi}{2}\\&=\frac{\pi^5}{30}a^2+8a+\frac{\pi}{2}\\&=\frac{\pi^5}{30}\left(a+\frac{120}{\pi^5}\right)^2-\frac{480}{\pi^5}+\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

よって，$a=-\dfrac{120}{\pi^5}$ のとき

$F(a)$ は最小…（答）

5.

(1) $p=n-2q>0$ $\quad\therefore\quad 0<q<\dfrac{n}{2}$

q が整数の時 p も整数
よって

(i) n：偶数のとき

$q=1,\ 2,\ \cdots,\ \dfrac{n}{2}-1$

がありえるので

$\dfrac{n}{2}-1$（個）

(ii) n：奇数のとき

$q=1,\ 2,\ \cdots,\ \dfrac{n-1}{2}$

がありえるので

$\dfrac{n-1}{2}$（個）

（答）

(2) $q=k$ のとき $0<p<n-2k$
$\therefore$ $q=k$ 上の格子点は $n-2k-1$ 個。

(i) n：偶数のとき

$q=1,\ 2,\ \cdots,\ \dfrac{n}{2}-1$

なので b_n は

$$\begin{aligned}b_n&=\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(n-2k-1)\\&=\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}(n-1)-2\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}k\\&=\left(\frac{n}{2}-1\right)(n-1)-\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot\frac{n}{2}\\&=\left(\frac{n}{2}-1\right)^2\text{（個）}\end{aligned}$$

(ii) n：奇数のとき

$q=1,\ 2,\ \cdots,\ \dfrac{n-1}{2}$

なので b_n は

$$\begin{aligned}b_n&=\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}(n-2k-1)\\&=\frac{n-1}{2}(n-1)-\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}\\&=\frac{n-1}{2}\frac{n-3}{2}=\frac{1}{4}(n-1)(n-3)\text{（個）}\end{aligned}$$

（答）$\begin{cases}n：\text{奇数}\ \dfrac{1}{4}(n-1)(n-3)\ \text{個}\\ n：\text{偶数}\ \left(\dfrac{n}{2}-1\right)^2\ \text{個}\end{cases}$

(3) (i) n：偶数のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{2}-1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}{n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{4}$$

(ii) n：奇数のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n-1}{2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}(n-1)(n-3)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)=\frac{1}{4}$$

以上より

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=0,\quad\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2}=\frac{1}{4}$ …（答）