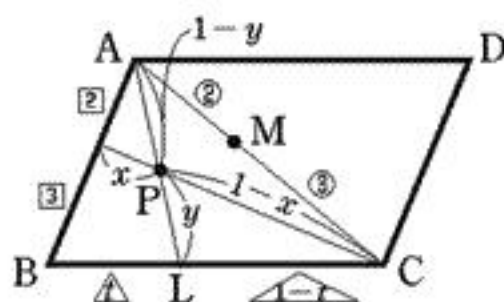


①

(1) P が NC を $x:1-x$ に内分する点

LA を $y:1-y$ に内分する点

となるように x, y をおく。



$$\overrightarrow{BP} = y \cdot \overrightarrow{BA} + (1-y)\overrightarrow{BL} = y \cdot \vec{a} + (1-y)t\vec{c} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{BP} = (1-x)\overrightarrow{BN} + x\overrightarrow{BC} = \frac{3(1-x)}{5}\vec{a} + x\vec{c} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\square ABCD$ より $\vec{a}$ と $\vec{c}$ は 1 次独立なので、①と③の係数を比較して、

$$\begin{cases} y = \frac{3(1-x)}{5} \\ (1-y)t = x \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x = \frac{2t}{5-3t} \\ y = \frac{3(1-t)}{5-3t} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{\overrightarrow{BP} = \frac{3(1-t)}{5-3t}\vec{a} + \frac{2t}{5-3t}\vec{c}}}$$

(2) P, M, D が一直線上 $\iff \overrightarrow{DM} = k\overrightarrow{DP}$ (k は 0 でない実数)

とかける。

$$\overrightarrow{BD} = \vec{a} + \vec{c} \quad (\because \square ABCD \text{ より}), \quad \overrightarrow{BM} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{c} \text{ より}$$

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BD}$$

$$= \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{c} - (\vec{a} + \vec{c}) = -\frac{2}{5}\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BD}$$

$$= \frac{3(1-t)}{5-3t}\vec{a} + \frac{2t}{5-3t}\vec{c} - (\vec{a} + \vec{c}) = -\frac{2}{5-3t}\vec{a} - \frac{5(1-t)}{5-3t}\vec{c}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} -\frac{2}{5} = -\frac{2k}{5-3t} \\ -\frac{3}{5} = -\frac{5(1-t)k}{5-3t} \end{cases}$$

第 1 式より k を消去すると、

$$15t^2 - 31t + 10 = 0 \quad \therefore (5t-2)(3t-5) = 0 \quad \therefore t = \frac{2}{5}, \frac{5}{3}$$

ここで、 L は BC を $t:1-t$ に内分している点より

$$0 < t < 1 \quad \therefore \quad \underline{\underline{t = \frac{2}{5}}}$$

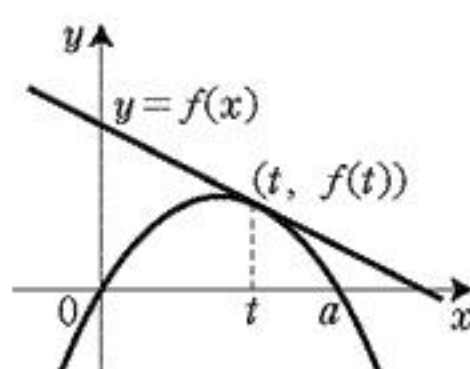
[2]

(1) $f'(x) = -2x + a$ より,

$$y - f(t) = f'(t)(x - t)$$

$$\begin{aligned}\therefore y &= (-2t + a)(x - t) - t^2 + at \\ &= (-2t + a)x + t^2\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{y = (-2t + a)x + t^2}}$$



(2) $y = f(x)$ の $(t, f(t))$ における接線が A を通るとすれば,

$$4a^2 - 5a + 2 = (-2t + a)(-a) + t^2$$

$$\therefore t^2 + 2at - 5a^2 + 5a - 2 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

①の判別式 D を計算すると,

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-5a^2 + 5a - 2) = 6a^2 - 5a + 2$$

$$= 6\left(a - \frac{5}{12}\right)^2 + \frac{23}{24} > 0$$

したがって, ①を満たす t は必ず 2 つある。

よって, A から $y = f(x)$ へ接線が 2 本引ける。

(3) $g(t) = t^2 + 2at - 5a^2 + 5a - 2 = (t + a)^2 - 6a^2 + 5a - 2$ とおく。

$y = g(t)$ と t 軸との交点のうち x 座標が大きいものが 0 と a の間にあればよいわけだから, $g(0) < 0$ かつ $g(a) > 0$ が求める条件である。

$$g(0) = -5a^2 + 5a - 2 = -5\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0$$

$\therefore g(0) < 0$ は自動的に満たされる。

$$g(a) = -2a^2 + 5a - 2$$

$$\therefore g(a) > 0 \iff -2a^2 + 5a - 2 > 0$$

$$\iff (2a - 1)(a - 2) < 0 \iff \frac{1}{2} < a < 2$$

以上より, 求める条件は $\underline{\underline{\frac{1}{2} < a < 2}}$

(4) $a = 1$ のとき①は $t^2 + 2t - 2 = 0$ $\therefore t = -1 \pm \sqrt{3}$

l は大きいほうの解における接線だから $t = \sqrt{3} - 1$

また l は, $l: y = (-2t + 1)x + t^2$

よって, 求める面積 S は

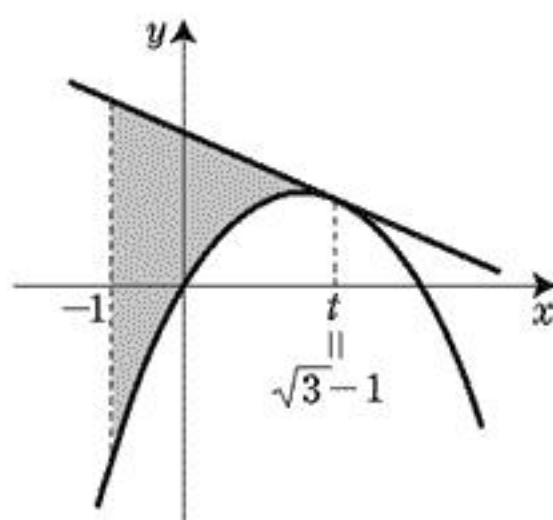
$$S = \int_{-1}^t \{(-2x + 1)x + t^2\} - \{-x^2 + x\} dx$$

$$= \int_{-1}^t x^2 - 2tx + t^2 dx$$

$$= \int_{-1}^t (x - t)^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x - t)^3 \right]_{-1}^t$$

$$= \underline{\underline{\sqrt{3}}}$$



問題の等差数列を $\{a_n\}$ とおくと, $a_n = 1 + (n-1)d$ とかけて,

$$S_n = \frac{n(1+a_n)}{2} = \frac{n\{2+(n-1)d\}}{2}$$

$$(1) \quad 94 = \frac{n\{2+(n-1)d\}}{2} \quad \therefore \quad \frac{188}{n} = 2 + (n-1)d$$

ここで (右辺) が整数なので, $\frac{188}{n}$ は整数。

$$188 = 2^2 \times 47 \text{ より,}$$

$n = 1, 2, 4, 47, 94, 188$ の可能性に限られるが,

$$n \geq 3 \text{ と, } \frac{188}{n} > (n-1)d \quad \therefore \quad \frac{188}{n(n-1)} > d \geq 1$$

すなわち $\frac{188}{n(n-1)} \geq 1$ より, $n = 4$ の可能性に限ることができる。

また, このとき,

$$\frac{188}{4} = 2 + 3d \quad \therefore \quad d = 15 \text{ となり, 仮定をみたす。}$$

$\therefore$ 題意をみたす (n, d) の組は $(n, d) = (4, 15)$

$$(2) \quad 98 = \frac{n\{2+(n-1)d\}}{2} \quad \therefore \quad \frac{196}{n} = 2 + (n-1)d$$

(1)と同様にして $196 = 2^2 \times 7^2$ より

$n = 1, 2, 4, 7, 14, 28, 49, 98, 196$ に限られる。

また $n \geq 3$, $\frac{196}{n(n-1)} \geq 1$ より,

$n = 4, 7, 14$ に限られる。

$$n = 4 \text{ のとき, } \frac{196}{4} = 2 + 3d \text{ より } d = \frac{47}{3}$$

$$n = 7 \text{ のとき, } \frac{196}{7} = 2 + 6d \text{ より } d = \frac{13}{3}$$

$$n = 14 \text{ のとき, } \frac{196}{14} = 2 + 13d \text{ より } d = \frac{12}{13}$$

となり, いずれも不適。したがって, $S_n = 98$ となる n, d の組は存在しない。