

$$(1) \quad AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ABC = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} ar & as \\ cr & cs \end{pmatrix}$$

$$\therefore \underline{ABC = \begin{pmatrix} ar & as \\ cr & cs \end{pmatrix}}$$

$$(2) \quad CAB = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad BCAB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ap + cq \\ 0 & ar + cs \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & ap + cq \\ 0 & ar + cs \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} 0 & ar + cs \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$BCAB = kB$  より, 各成分を比較して  $\underline{k = ar + cs}$

(3) (2)より  $BCAB = (ar + cs)B$  に注意して,  $n \geq 2$  のときは,

$$(ABC)^n = ABCABC \cdots \underline{ABCABC} \cdots ABC$$

$$\parallel$$

$$(ar + cs)B$$

$$= (ar + cs)^{n-1} ABC$$

$$\therefore \underline{(ABC)^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} ar & as \\ cr & cs \end{pmatrix} & (n = 1) \\ \begin{pmatrix} ar(ar + cs)^{n-1} & as(ar + cs)^{n-1} \\ cr(ar + cs)^{n-1} & cs(ar + cs)^{n-1} \end{pmatrix} & (n \geq 2) \end{cases}}$$

$$\begin{cases} z_1 = \alpha = \cos \frac{360^\circ}{5} + i \sin \frac{360^\circ}{5} \\ z_n = z_{n-1}^3 \end{cases}$$

より  $z_n = \alpha^{3^{n-1}}$

(1) ド・モアブルの定理より,

$$\alpha^5 = \cos 5 \times \frac{360^\circ}{5} + i \sin \frac{360^\circ}{5} = 1 \text{ に注意すると}$$

$$z_5 = \alpha^{3^4} = \alpha^{81} = \alpha$$

(2)  $k$  を  $k \geq 0$  なる整数とするととき,  $3^{4k}$  は 5 で割ると余りが 1 になる  $\dots (*)$

が成立している

$\because k=0$  のとき,  $3^0=1$  より成立

$k$  のとき成立を仮定すると  $3^{4k} = 5l+1$  ( $l$  は整数) とかける。  
すると,

$$3^{4k+1} = 5 \cdot 3l + 3 \dots\dots\dots 5 \text{ で割って余り } 3$$

$$3^{4k+2} = 5 \cdot (9l+1) + 4 \dots\dots\dots 5 \text{ で割って余り } 4$$

$$3^{4k+3} = 5 \cdot (27l+5) + 2 \dots\dots\dots 5 \text{ で割って余り } 2$$

$$3^{4(k+1)} = 5 \cdot (81l+16) + 1 \dots\dots\dots 5 \text{ で割って余り } 1$$

したがって帰納法により,  $(*)$  が成立する。

そこで,  $\alpha^5=1$  より  $z_n=\alpha$  となるには,  $3^{n-1}$  が 5 で割って 1 余ることが必要かつ十分。このような  $n$  は  $(*)$  より,

$$n-1=4k \text{ } (k \geq 0 \text{ の整数}) \quad \therefore n=4k+1$$

したがって, 求める  $n$  は 1, 5, 9,  $\dots$ , 97 で, その個数は 25 個

(3)  $(*)$  の証明からもわかるように,

$$z_{4k+1} + z_{4k+2} + z_{4k+3} + z_{4k+4} = \alpha + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^2 = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4$$

である。

$$\text{いま, } \alpha^5=1 \text{ より, } (\alpha-1)(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)=0$$

$$\alpha \neq 1 \text{ より, } 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$$

$$\text{したがって, } z_{4k+1} + z_{4k+2} + z_{4k+3} + z_{4k+4} = -1$$

よって,

$$\sum_{n=1}^{100} z_n = \sum_{k=0}^{24} z_{4k+1} + z_{4k+2} + z_{4k+3} + z_{4k+4} = \sum_{k=0}^{24} (-1) = \underline{\underline{-25}}$$

$$3 \quad a^x \geq x \iff x \log a \geq \log x$$

$$\iff \log a \geq \frac{\log x}{x}$$

より、 $\log a \geq \frac{\log x}{x}$  が任意の正の実数  $x$  に対して成り立つような  $a$  の範囲を求めればよい。

$$f(x) = \frac{\log x}{x} \text{ とおくと } f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

よって、 $f(x)$  の増減は右表となるので、

$$f(x) \leq f(e) = \frac{1}{e}$$

したがって、求める条件は

$$\log a \geq \frac{1}{e} \text{ となり, } \underline{\underline{a \geq e^{\frac{1}{e}}}}$$

が求める  $a$  の範囲となる。

|         |   |     |     |     |            |
|---------|---|-----|-----|-----|------------|
| $x$     | 0 | ... | $e$ | ... | $(\infty)$ |
| $f'(x)$ |   | +   | 0   | -   |            |
| $f(x)$  |   |     |     |     | (0)        |

$$(1) \quad g_{k,N}(t) = \sum_{n=1}^N e^{-kt(n-1)} \quad \text{とおくと,}$$

$$g_{k,N}(t) = \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{e^{kt}} \right)^{n-1} = \frac{1 - \left( \frac{1}{e^{kt}} \right)^N}{1 - \frac{1}{e^{kt}}}$$

$$\text{ここで, } k > 0, t > 0 \text{ より } e^{kt} > 1 \quad \therefore \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{e^{kt}} \right)^N = 0$$

したがって,  $\lim_{N \rightarrow \infty} g_{k,N}(t)$  は収束し,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} g_{k,N}(t) = \frac{e^{kt}}{e^{kt} - 1} \quad \therefore \quad \underbrace{f_k(t) = \frac{e^{kt}}{e^{kt} - 1}}$$

$$(2) \quad F_k(x) = \int_1^x f_k(t) dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_1^x \frac{e^{kt}}{e^{kt} - 1} dt = \left[ \frac{1}{k} \log |e^{kt} - 1| \right]_1^x \\ &= \frac{\log(e^{kx} - 1) - \log(e^k - 1)}{k} = \frac{1}{k} \log \frac{e^{kx} - 1}{e^k - 1} \end{aligned}$$

$$(3) \quad F_k(x) = \frac{1}{k} \{ \log e^{kx} (1 - e^{-kx}) + \log e^k (1 - e^{-k}) \}$$

$$= x - 1 + \frac{1}{k} \log(1 - e^{-kx}) + \frac{1}{k} \log(1 - e^{-k})$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - e^{-kx}) = 0 \quad (\because x > 0) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \log(1 - e^{-k}) = 0$$

より,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(1 - e^{-kx})}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \log(1 - e^{-kx}) = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(1 - e^{-k})}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \log(1 - e^{-k}) = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\text{したがって } \lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x) = \underbrace{x - 1}$$

\*印が3つならぶことをビンゴと呼ぶことにする。

- (1) 得点が入るのは、最初にビンゴしたときだけより、最初の3枚でビンゴしたときの3点が最小の得点である。そのときの確率は、

$$\begin{array}{c} 8 \\ \text{タテ, ヨコ, ナナメ} \\ \text{のどれか} \end{array} \times \frac{\begin{array}{c} \text{最初の3枚の並べ方} \\ 3! \end{array} \times \begin{array}{c} \text{残りの並べ方} \\ 6! \end{array}}{\begin{array}{c} 9! \\ \text{全並べ方} \end{array}} = \frac{2}{21}$$

- (2) タテ, ヨコがビンゴしていない状態 (ナナメはビンゴしていてもよい) は、

|                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">           5   *   *<br/>           *   9   *<br/>           *   *   6         </div> | <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">           5   *   *<br/>           *   *   3<br/>           *   4   *         </div> | <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">           *   2   *<br/>           1   *   *<br/>           *   *   6         </div> | <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">           *   2   *<br/>           *   *   3<br/>           7   *   *         </div> |
| <hr style="border: none; border-top: 1px dashed black; margin: 10px 0;"/>                                                                                        |                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                  |
| <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">           *   *   8<br/>           *   9   *<br/>           7   *   *         </div> | <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">           *   *   8<br/>           1   *   *<br/>           *   4   *         </div> |                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                  |

の6通りが考えられるが、ナナメがビンゴのときを削って2通り。したがって、8 or 9点となることはなく、最大の得点は7点となる。このときの確率は、

$$\begin{array}{c} 2 \\ \text{6枚目まで} \\ \text{ビンゴしていない} \\ \text{表の数} \end{array} \times \frac{\begin{array}{c} \text{最初の6枚の並べ方} \\ 3! \end{array} \times \begin{array}{c} \text{残り3枚の並べ方} \\ 6! \end{array}}{\begin{array}{c} 9! \\ \text{全並べ方} \end{array}} = \frac{1}{42}$$