

1 (1) 点CはOA上の点なので

$$\vec{OC} = t \vec{OA} \quad (t: \text{定数}) \text{ とおける.}$$

$$\vec{BC} \perp \vec{OA} \text{ より}$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{OA} = 0 \Leftrightarrow (\vec{OC} - \vec{OB}) \cdot \vec{OA} = 0$$

$$\Leftrightarrow t |\vec{OA}|^2 - \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$$

$$\Leftrightarrow t a^2 - k = 0$$

$$\therefore t = \frac{k}{a^2}$$

$$\text{したがって } \vec{OC} = \frac{k}{a^2} \vec{OA} \dots (\text{答})$$

(2) CH:HB = s:1-s とおくと

$$\vec{AH} = (1-s) \vec{AC} + s \vec{AB}$$

$$= (1-s) \left(\frac{k}{(\sqrt{2})^2} \vec{OA} - \vec{OA} \right) + s (\vec{OB} - \vec{OA})$$

$$= \left\{ (1-s) \frac{k}{2} - 1 \right\} \vec{OA} + s \vec{OB}$$

$$\vec{AH} \perp \vec{OB} \text{ より } \vec{AH} \cdot \vec{OB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ (1-s) \frac{k}{2} - 1 \right\} \vec{OA} \cdot \vec{OB} + s |\vec{OB}|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-s) \frac{k^2}{2} - k + s = 0$$

$$\therefore s = \frac{2k - k^2}{2 - k^2}$$

$$\vec{OH} = (1-s) \vec{OC} + s \vec{OB}$$

$$= \frac{k}{2} (1-s) \vec{OA} + s \vec{OB}$$

$$\therefore \begin{cases} u = \frac{k}{2} (1-s) = \frac{k(1-k)}{2-k^2} \\ v = s = \frac{k(2-k)}{2-k^2} \end{cases} \dots (\text{答})$$

$$\begin{aligned} 2. f(x) &= ax^2 + (1-2a)x \\ &= a \left\{ x - \left(1 - \frac{1}{2a}\right) \right\}^2 - \frac{(2a-1)^2}{4a} \end{aligned}$$

なので $f(x)$ は下に凸である。

$f(0) = 0$ なので。

i) を満たすためには。

$$\text{軸} \quad 1 - \frac{1}{2a} \leq 0 \text{ であればよい} \quad \therefore a \leq \frac{1}{2} \quad \text{--- (1)}$$

さて、 $g(x) = f(x) + 1$ とおくと。

i) は $-3 \leq x < 0$ において $g(x) \geq 0$ ということである。

よって $g(0)g(3) < 0$ のときは不適。

• $g(0)g(3) = 0$ のときは、 $g(0) = 1 > 0$ より。

$$g(3) = 15a - 2 \geq 0 \text{ かつ } \text{軸} \quad 1 - \frac{1}{2a} \leq -3 \text{ であればよい。}$$

これを満たす a はなし

• $g(0)g(3) > 0$ のときは、 $g(3) = 15a - 2 > 0$ 、つまり $a > \frac{2}{15}$ のとき。②

$$a > \frac{2}{15} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2a} > -\frac{11}{4} > -3 \text{ なので、これは (1) から}$$

軸は $-3 < 1 - \frac{1}{2a} \leq 0$ を満たす。

$$\begin{aligned} \text{よって } g\left(1 - \frac{1}{2a}\right) &= 1 - \frac{(2a-1)^2}{4a} \\ &= -\frac{4a^2 - 8a + 1}{4a} \geq 0 \text{ であればよい。} \end{aligned}$$

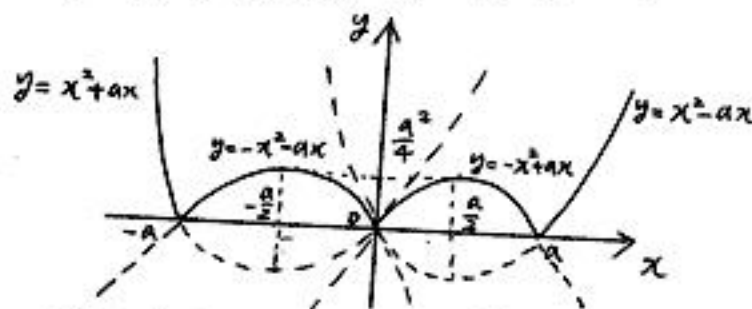
$$\text{これから } 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq a \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{①} \sim \text{③} \text{ より } 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$$

3. (1) $x \geq 0$ のとき

$$y = |x^2 - ax| = \begin{cases} (x - \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4} & (x \geq a) \\ - (x - \frac{a}{2})^2 + \frac{a^2}{4} & (0 \leq x < a) \end{cases}$$

$|x^2 - ax| = |(-x)^2 - a| - x|$ より、 y は y 軸に関して対称なので、グラフは下図のようになった。



(2) グラフの対称性を考慮して計算すると

(i) $a \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} F(a) &= 2 \int_0^1 (-x^2 + ax) dx = 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 \right]_0^1 \\ &= a - \frac{2}{3} \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(ii) $a < 1$ のとき

$$\begin{aligned} F(a) &= 2 \left\{ \int_0^a (-x^2 + ax) dx + \int_a^1 (x^2 - ax) dx \right\} \\ &= 2 \left\{ \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 \right]_0^a + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 \right]_a^1 \right\} \\ &= \frac{2}{3}a^3 - a + \frac{2}{3} \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) $a < 1$ のとき

$$F'(a) = 2a^2 - 1 = 2(a - \frac{\sqrt{2}}{2})(a + \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$a \geq 1$ のとき $F'(a) = 1 > 0$ より

増減表は右図より、 $F(a)$ の

最小値は

$$F(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{2}{3}(\frac{\sqrt{2}}{2})^3 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$$

$\dots (\text{答})$

a	0	$\dots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\dots$	1	$\dots$
$F'(a)$		-	0	+	+	+
$F(a)$		$\searrow$	$\frac{2-\sqrt{2}}{3}$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$