

1

$$(1) |\vec{OA}|^2 = 3, \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 3 \neq 0,$$

$$\vec{OD} = \vec{OB} - \vec{OA} = (0, 1, -1)$$

$$\therefore \text{よるから, } D(0, 1, -1) \quad \dots (\text{答})$$

$$(2) \vec{CP} = \vec{OP} - \vec{OC} = s\vec{OA} + t\vec{OB} - \vec{OC} \\ = (s+t, s+2t, s-1)$$

$$\text{よ}, |\vec{CP}|^2 = (s+t)^2 + (s+2t)^2 + (s-1)^2 \\ = 3s^2 + (6t-2)s + 5t^2 + 1$$

t を固定したとき, s について最小にするときの s は,

$$s = -\frac{6t-2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3} - t \quad \dots (\text{答})$$

(3) t を固定したときの $|\vec{CP}|^2$ の最小値は,

$$|\vec{CP}|^2 = -3\left(\frac{1}{3} - t\right)^2 + 5t^2 + 1 \\ = 2t^2 + 2t + \frac{2}{3}$$

次に t を動かせば, $t = -\frac{1}{2}$ で最小になるから, $|\vec{CP}|^2$ を最小にする s と t は,

$$(s, t) = \left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}\right) \quad \dots (\text{答})$$

$$(4) \vec{OP}_0 = \frac{5}{6}\vec{OA} - \frac{1}{2}\vec{OB} \\ = \frac{1}{3}\vec{OA} - \frac{1}{2}(\vec{OB} - \vec{OA}) \\ = \frac{1}{3}\vec{OA} - \frac{1}{2}\vec{OD}$$

$$\therefore \vec{OA} \cdot \vec{OC} = 1, \vec{OD} \cdot \vec{OC} = -1, |\vec{OD}|^2 = 2 \neq 0,$$

$$\vec{OP}_0 = \left(\frac{\vec{OA} \cdot \vec{OC}}{|\vec{OA}|^2}\right) \vec{OA} + \left(\frac{\vec{OD} \cdot \vec{OC}}{|\vec{OD}|^2}\right) \vec{OD}$$

が成り立つ。

(証明終)

(1) 点 $A(-a, a^2)$ と点 $P(s, 0)$ を通る直線は,

$$y = -\frac{a^2}{s+a}(x-s)$$

であり、また点 $Q(t, t^2)$ を通るから,

$$t^2 = -\frac{a^2}{s+a}(t-s)$$

$$t^2 + \frac{a^2}{s+a}t - \frac{a^2s}{s+a} = 0$$

$$(t+a)\left(t - \frac{as}{s+a}\right) = 0$$

$$t \neq -a \text{ より, } t = \frac{as}{s+a} \quad \dots (\text{答})$$

(2) $\{x_n\}$ は n の漸化式より,

$$\begin{aligned} x_1 &= c, \quad x_{n+1} = \frac{ax_n}{x_n + a} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{x_n}} \quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

が得られるから,

$$u_1 = \frac{1}{c}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{a} \quad (n=1, 2, \dots)$$

$\{u_n\}$ は等差数列となり,

$$u_n = \frac{1}{c} + \frac{1}{a}(n-1) \quad \dots (\text{答})$$

(3) $x_n = \frac{ac}{a+c(n-1)}$ となるから,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}(x_n - x_{n+1})x_{n+1}^2 \\ &= \frac{a^3c^3}{2} \left(\frac{1}{a+c(n-1)} - \frac{1}{a+cn} \right) \frac{1}{(a+cn)^2} \\ &= \frac{a^3c^4}{2} \frac{1}{(a-c+cn)(a+cn)^3} \end{aligned}$$

$$n^r S_n = n^{r-4} \cdot \frac{a^3c^4}{2} \frac{1}{\left(\frac{a-c}{n} + c\right) \left(\frac{a}{n} + c\right)^3}$$

これは $r \geq 5$ のとき発散し, $r \leq 3$ のとき 0 に収束する。 $r=4$ のとき正の実数値に収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^4 S_n = \frac{a^3}{2} \quad \dots (\text{答})$$

(1) 直線 ℓ の方程式は,

$$\ell: y = \frac{a}{L}(x-1) + a$$

すなわち

$$\ell: ax - Ly + a(L-1) = 0$$

と表せ, $(0,0)$ と ℓ の距離が $1/2$ であることから,

$$\frac{|a(L-1)|}{\sqrt{a^2+L^2}} = \frac{1}{2}$$

$$a^2(L-1)^2 = a^2 + L^2$$

$$L\{(a^2-1)L - 2a^2\} = 0$$

$$L \neq 0 \text{ より, } L = \frac{2a^2}{a^2-1} \quad \dots (\text{ⅰ})$$

$$(2) \quad S = \frac{1}{2}La = \frac{a^3}{a^2-1}$$

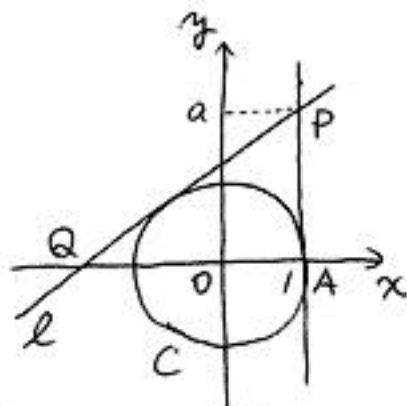
$$\frac{dS}{da} = \frac{3a^2(a^2-1) - 2a^4}{(a^2-1)^2} = \frac{a^2(a^2-3)}{(a^2-1)^2}$$

よって, S が最小となるのは

$a = \sqrt{3}$ のとき,

最小値は

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \dots (\text{ⅱ})$$



a	1	$\dots \sqrt{3}$	$\dots$
$\frac{dS}{da}$	-	0	+
S	$\searrow$		$\nearrow$

- (1) $f(x)$ の値域は $0 \leq f(x) \leq 1$ なるから,
 2 を定義域とすれば,

$$g(x) = f(f(x)) = |f(x) - 1|$$

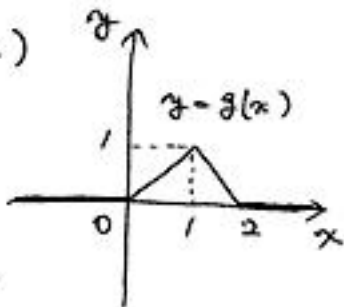
より, $|x-1| = \begin{cases} -x+1 & (0 \leq x \leq 1) \\ x-1 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$

より,

$$g(x) = \begin{cases} |1-1| = 0 & (x < 0, x > 2) \\ |1-x| = 1-x & (0 \leq x \leq 1) \\ |x-1| = x-1 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

とあるから, $y = g(x)$ のグラフは

右図のようになる。



- (2) $t = \frac{x-n^2+n}{n}$ と変数変換すると,

$$\begin{aligned} (S_n)' &= n \int_{-n+1}^1 g(t) \cos \pi(t+n-1) dt \\ &= n(-1)^{n-1} \int_0^1 t \cos \pi t dt \\ &= \frac{n(-1)^{n-1}}{\pi} \left[t \sin \pi t + \frac{1}{\pi} \cos \pi t \right]_0^1 \\ &= \frac{2n(-1)^n}{\pi^2} \dots \left(\frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

(1) (iii) より, 袋 D のカードの数字はすべて同じだから,

(ii) より, 袋 A では 3 が 4 枚, 9 が 2 枚である。

また,

(i) $\Leftrightarrow$ 6 枚のカードの数字の合計が
すべての袋で等しい

であるから, 袋 D のカードの数字を d とすると,

$$6d = 3 \cdot 4 + 9 \cdot 2 = 30 \quad \therefore d = 5$$

よって, 袋 A の 3 は 4 枚で, 袋 D の数字は 5 ... (答)

(2) 袋 B の数字がすべて 3 以下だったとすると 合計は

30 にならず, すべて 3 以上だったとすると $p(A, B) \leq \frac{1}{3}$

になってしまうから, 「2 以下」「4 以上」の 2 種類が存在する 2 になる。

「2 以下」が t 枚あるとする。もし 9 が含まれていたらとすると,

$$p(A, B) = \frac{t}{6} = \frac{2}{3} \quad \therefore t = 4$$

となるが, 2 のとき合計は 30 に満たないから,

9 は含まれず,

$$p(A, B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{t}{6} = \frac{2}{3} \quad \therefore t = 3$$

2 種類の数字を b_1, b_2 ($b_1 < b_2$) とすると,
数字の合計は

$$3(b_1 + b_2) = 30 \quad \therefore b_1 + b_2 = 10$$

となるから, (b_1, b_2) の組合せを考えると, $(b_1, b_2) = (2, 8)$

よって, 2 と 8 が 3 枚ずつ ... (答)

(3) $p(C, D) = \frac{2}{3}$ より, 袋 C には「4 以下」が 2 枚,

「6 以上」が 4 枚あり, もし「2 または 3 または 4」が 2 枚

であったとすると $p(B, C) \leq \frac{1}{2}$ になってしまうから,

1 が 2 枚と決まり, 残りのカードの数を c とすると,

$$1 \cdot 2 + 4c = 30 \quad \therefore c = 7$$

よって, 1 が 2 枚, 7 が 4 枚 ... (答)