

(平 17 前)

数 学

(理 科 系)

(1 ～ 5 ページ)

注 意

- 1 問題は 1 ～ 5 ページ。2 ページの次の白紙(2 枚)は下書き用紙である。
- 2 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点

1. O を原点とする空間の 3 点 $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 0)$, $C(0, 0, 1)$ がある。

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - \left(\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|^2} \right) \overrightarrow{OA}$$

を満たす点を D とする。ただし、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ は $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積を表す。次の問に答えよ。(配点 30 点)

- (1) D の座標を求めよ。
- (2) 2 つの実数 s と t に対して、 $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ を満たす点を P とする。 t を固定して考えたとき、 $|\overrightarrow{CP}|^2$ を最小にする s を t を用いて表せ。
- (3) $|\overrightarrow{CP}|^2$ を最小にする s と t の値を求めよ。
- (4) (3) で求めた s と t の値をそれぞれ s_0 と t_0 とする。 s_0 と t_0 に対し、 P_0 を $\overrightarrow{OP_0} = s_0\overrightarrow{OA} + t_0\overrightarrow{OB}$ を満たす点とする。

$$\overrightarrow{OP_0} = \left(\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OA}|^2} \right) \overrightarrow{OA} + \left(\frac{\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OD}|^2} \right) \overrightarrow{OD}$$

となることを示せ。

2. a を正の実数とする。 xy 平面の放物線 $C: y = x^2$ 上に点 $A(-a, a^2)$ をとる。 $s > 0$ のとき、 x 軸上の点 $P(s, 0)$ に対して、直線 AP と C の2つの交点のうち、 A とは異なる交点を $Q(t, t^2)$ とする。 Q から x 軸に下ろした垂線と x 軸の交点を $P'(t, 0)$ とする。いま、 x 軸上の点 $P_1(c, 0)$ ($c > 0$) から出発して、点 P に対して点 Q, P' を定めたのと同じ方法で P_1 から点 Q_1, P_2 を定め、同様に P_2 から点 Q_2, P_3 を定め、この方法を繰り返して、 $P_1, P_2, P_3, \dots$ と $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ を定める。次の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) t を a と s を用いて表せ。

(2) 点 P_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) の x 座標を x_n とする。数列 $\{u_n\}$ を $u_n = \frac{1}{x_n}$ で定める。 $\{u_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 直角三角形 $P_n Q_n P_{n+1}$ の面積を S_n で表す。自然数 r を選んで、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r S_n$ が正の実数値に収束するようにできる。このような r の値とそのときの極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r S_n$ を求めよ。

3. a を実数とし, $a > 1$ とする。点 $P(1, a)$ を通り, 円 $C: x^2 + y^2 = 1$ と接する 2 本の直線のうち, $x = 1$ とは異なる直線を ℓ とする。 ℓ と x 軸の交点を Q とする。次の問に答えよ。(配点 30 点)

- (1) $A(1, 0)$ とする。線分 QA の長さ L を a を用いて表せ。
- (2) 三角形 PQA の面積を S とする。 a が $a > 1$ の範囲を動くとき, S の最小値とそのときの a の値を求めよ。

4. 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \text{ または } x > 2 \text{ のとき} \\ |x - 1| & 0 \leq x \leq 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定める。次の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) $g(x) = f(f(x))$ とおく。関数 $y = g(x)$ のグラフをかけ。

(2) n を自然数とする。 $\int_0^{n^2} g\left(\frac{x - n^2 + n}{n}\right) \cos \frac{\pi x}{n} dx$ を求めよ。

5. A, B, C, D 4つの袋の中にそれぞれ6枚のカードが入っている。それぞれのカードには1から9までの数字の1つが書かれている。A, B, C, Dの袋の中のカードは次の4つの条件を満たしているとする。

- (i) 袋の中からカードを無作為に1枚抜いたとき、カードに書かれている数字の期待値は、A, B, C, Dすべて同じである。
- (ii) $p(A, B) = p(B, C) = p(C, D) = p(D, A) = \frac{2}{3}$ である。
ここで、 $p(X, Y)$ は袋Xと袋Yからそれぞれ1枚ずつカードを無作為に抜いたとき、Xから抜いたカードに書かれている数字がYから抜いたカードに書かれている数字より大きい確率を表す。
- (iii) A, B, Cの袋の中のカードに書かれている数字はそれぞれ2種類で、Dの袋の中のカードにはすべて同じ数字が書かれている。
- (iv) Aの袋の中のカードに書かれている数字の種類は3と9である。

次の問に答えよ。(配点30点)

- (1) Aの袋の中の3の書かれているカードの枚数と、Dの袋の中のカードに書かれた数字を求めよ。
- (2) Bの袋の中のカードに書かれている2種類の数字と、そのそれぞれの数字の書かれたカードの枚数を求めよ。
- (3) Cの袋の中のカードに書かれている2種類の数字と、そのそれぞれの数字の書かれたカードの枚数を求めよ。