

1.

(1) $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ から、

$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ は一次独立な単位ベクトルである。

今、右図のように半直線 OX , OY 上に、

$$OD=OE=1$$

となるような点 D , E をとり、四角形 $ODFE$ が平行四辺形となるように点 F をとると

四角形 $ODFE$ はひし形である。

このとき OF は $\angle DOE = \angle XOY$ の二等分線となるので、

点 C は直線 OF 上にある。

すると、

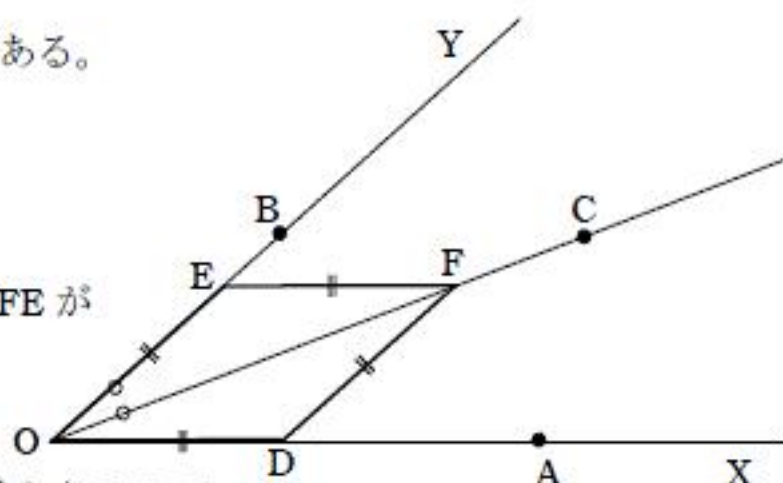
$$\begin{aligned}\vec{OF} &= \vec{OE} + \vec{OD} \\ &= \frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|} + \frac{\vec{OB}}{|\vec{OB}|} \\ &= \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\end{aligned}$$

とかけることから、とある実数 t を用いて

$$\vec{OC} = \vec{c} = t\vec{OF} = t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

と表される。

…証明終了



(2) P は $\angle XOY$ の二等分線上、

さらに P は $\angle XAB$ の二等分線上にあるので、

実数 k , l を用いて

$$\vec{OP} = 6k\left(\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{3}\right) = 3k\vec{a} + 2k\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}\vec{AP} &= 4l\left(\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{AB}}{4}\right) \\ &= 2l\vec{a} + l(\vec{b} - \vec{a}) \\ &= l\vec{a} + l\vec{b} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

とかける。すると、

$$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} \Leftrightarrow \vec{OP} = \vec{AP} + \vec{OA}$$

の変形と①, ②とで

$$3k\vec{a} + 2k\vec{b} = (l+1)\vec{a} + l\vec{b}$$

より、 $\vec{a}$, $\vec{b}$ は一次独立なので、

$$3k = l+1, \quad 2k = l$$

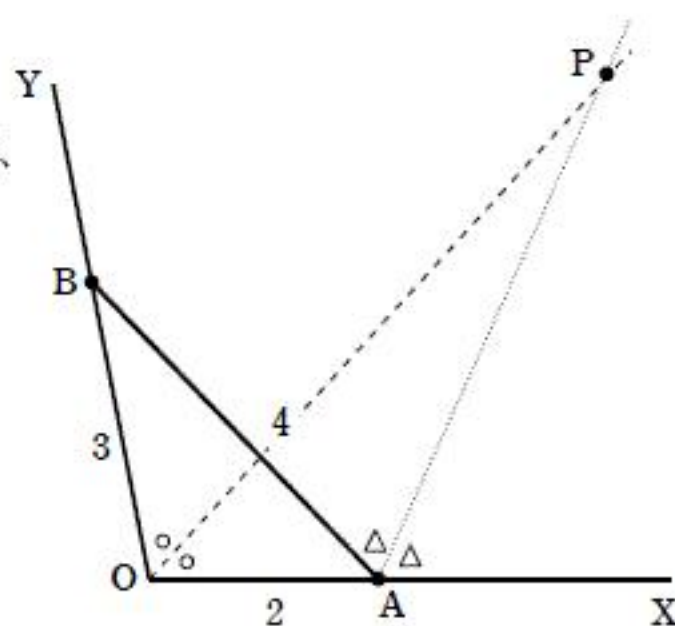
を k, l の連立方程式として解くことで、

$$k=1, \quad l=2$$

となる。よって①へ代入することで、

$$\vec{p} = \vec{OP} = 3\vec{a} + 2\vec{b} \quad \dots \text{答}$$

※この点 P は三角形 OAB の傍心の1つである。



2.

$l_t: y = 2tx - t^2$ について、

(1) 点 $P(X, Y)$ を通る直線 l_t がただ 1 つであるための条件は、

$$Y = 2tX - t^2 \Leftrightarrow t^2 - 2Xt + Y = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が t の二次方程式としてただ 1 つの実数解をもつことである。

よって①の判別式を D として、

$$D/4 = X^2 - Y = 0$$

から、 $Y = X^2$ となり、これは点 $P(X, Y)$ が放物線 $y = x^2$ 上にあることを意味する。

よって求める点 P の軌跡は、放物線 $y = x^2$ …答

(2) $|t| \geq 1 \Leftrightarrow t \leq -1, 1 \leq t \quad \cdots \textcircled{2}$

から、 t が②の範囲を動くときの直線 l_t が通る点を (X, Y) とすると、

①が②の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ条件を考えればよい。

そこで、

$$f(t) = x^2 - 2Xt + Y = (t - X)^2 + Y - X^2$$

とおくと、 $y = f(t)$ のグラフが ty 平面において t 軸と②の範囲で交点をもつ条件を考えることとなり、

(i) $X \leq -1$ のとき、

$$f(X) \leq 0 \Leftrightarrow Y - X^2 \leq 0$$

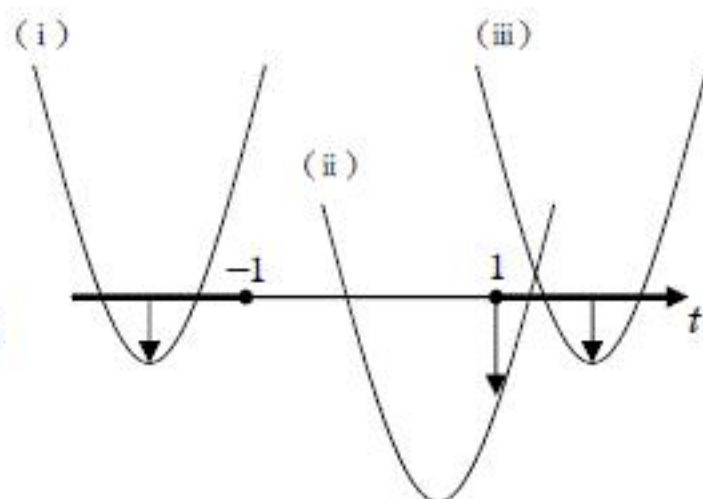
(ii) $-1 < X < 1$ のとき、

$$f(-1) \leq 0 \quad \text{または} \quad f(1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow Y \leq -2X - 1 \quad \text{または} \quad Y \leq 2X - 1$$

(iii) $1 \leq X$ のとき、

$$f(X) \leq 0 \Leftrightarrow Y - X^2 \leq 0$$



以上をまとめることで、点 (X, Y) の存在領域、つまり直線 l_t が通る点の全体は右図の斜線部分(境界を含む)となる。

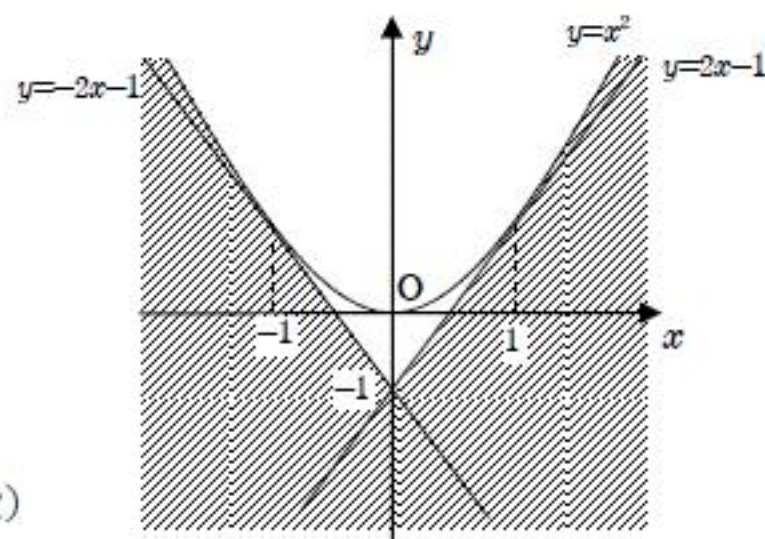
…答

※ l_t は放物線 $y = x^2$ 上の点 (t, t^2) での接線の

方程式なので解答は右のようであることが

わかるが、それでいきなり解答の図をかく

のは厳密さを欠くので遠慮したい。(最終手段)



3.

(1) 実数係数の二次方程式 $x^2 + px + q = 0$ の解の一つが $\alpha = \frac{3 + \sqrt{7}i}{2}$ のとき、

その共役な複素数である $\bar{\alpha} = \frac{3 - \sqrt{7}i}{2}$ も解である。よって解と係数の関係から、

$$\begin{cases} -p = \frac{3 + \sqrt{7}i}{2} + \frac{3 - \sqrt{7}i}{2} \\ q = \frac{3 + \sqrt{7}i}{2} \times \frac{3 - \sqrt{7}i}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -3 \\ q = 4 \end{cases} \quad \cdots \text{答}$$

(2) 実数係数の3次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ について、その解の一つが α であれば、 $\bar{\alpha}$ も解であり、するともう一つの解は実数解となり、それを $x = k$ とすると条件から $0 \leq k \leq 1$ を満たし、さらに(1)の結果を利用することで、

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= (x - \alpha)(x - \bar{\alpha})(x - k) \\ &= (x^2 - 3x + 4)(x - k) \\ &= x^3 - (k + 3)x^2 + (3k + 4)x - 4k \end{aligned}$$

が成立する。これが x の恒等式になるので係数を比較することで、

$$\begin{cases} a = -(k + 3) \\ b = 3k + 4 \\ c = -4k \end{cases}$$

が成立するが、今 a, b, c は整数であること、そして $0 \leq k \leq 1$ であることから、

$$k = 0, 1$$

のみ条件を満たす。よって、

$$k = 0 \text{ のとき、} (a, b, c) = (-3, 4, 0)$$

$$k = 1 \text{ のとき、} (a, b, c) = (-4, 7, -4)$$

となる。 …答