

1.

(1) $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ から、

$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ は一次独立な単位ベクトルである。

今、右図のように半直線 OX, OY 上に、

$$OD=OE=1$$

となるような点 D, E をとり、四角形 ODFE が

平行四辺形となるように点 F をとると

四角形 ODFE はひし形である。

このとき OF は $\angle DOE = \angle XOY$ の二等分線となるので、

点 C は直線 OF 上にある。

すると、

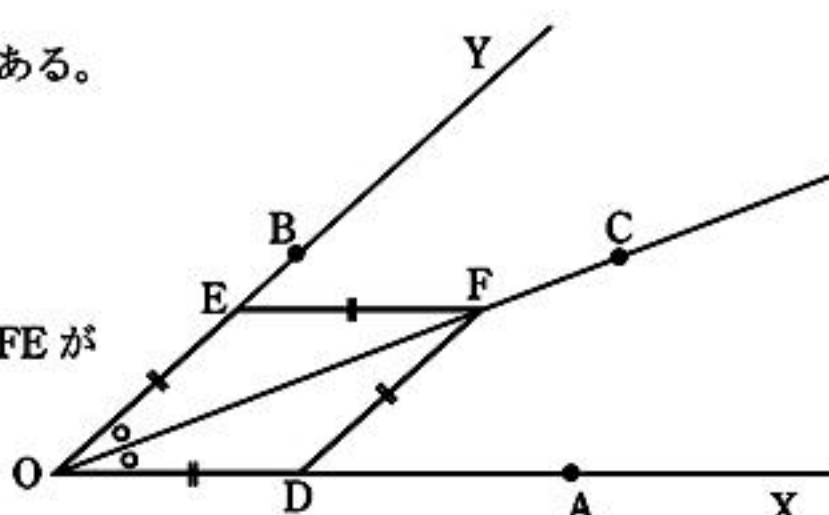
$$\begin{aligned}\vec{OF} &= \vec{OE} + \vec{OD} \\ &= \frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|} + \frac{\vec{OB}}{|\vec{OB}|} \\ &= \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\end{aligned}$$

とかけることから、とある実数 t を用いて

$$\vec{OC} = \vec{c} = t\vec{OF} = t \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)$$

と表される。

…証明終り



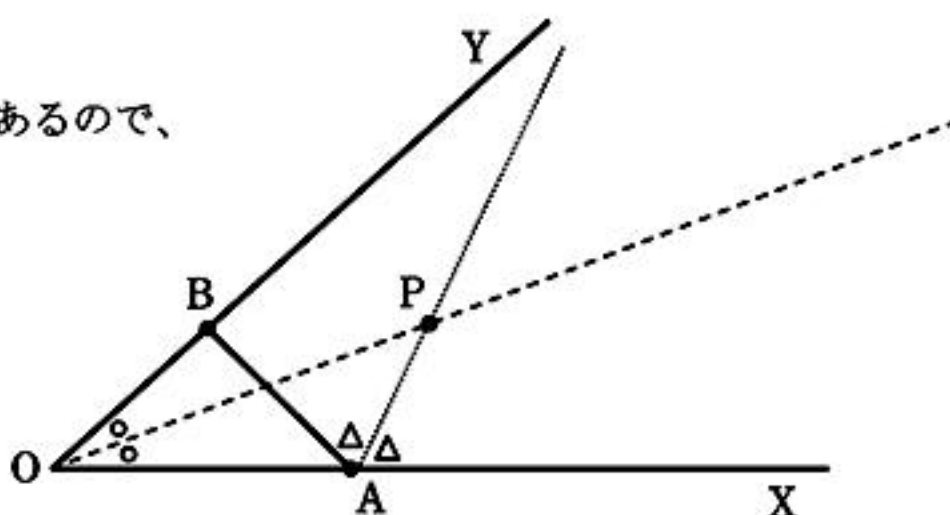
(2) P は $\angle XOY$ の二等分線上、

さらに P は $\angle XAB$ の二等分線上にあるので、

実数 k, l を用いて

$$\vec{OP} = k \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}\vec{AP} &= l \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} \right) \\ &= l \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b} - \vec{a}}{|\vec{b} - \vec{a}|} \right) \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$



とかける。すると、

$$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} \Leftrightarrow \vec{OP} = \vec{AP} + \vec{OA}$$

の変形と①, ②とで

$$\begin{aligned}\frac{k}{|\vec{a}|} \vec{a} + \frac{k}{|\vec{b}|} \vec{b} &= \frac{l}{|\vec{a}|} \vec{a} + \frac{l}{|\vec{b} - \vec{a}|} (\vec{b} - \vec{a}) + \vec{a} \\ \Leftrightarrow \frac{k}{|\vec{a}|} \vec{a} + \frac{k}{|\vec{b}|} \vec{b} &= \left(\frac{l}{|\vec{a}|} - \frac{l}{|\vec{b} - \vec{a}|} + 1 \right) \vec{a} + \frac{l}{|\vec{b} - \vec{a}|} \vec{b}\end{aligned}$$

より、 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立なので、

$$\frac{k}{|\vec{a}|} = \frac{l}{|\vec{a}|} - \frac{l}{|\vec{b} - \vec{a}|} + 1, \quad \frac{k}{|\vec{b}|} = \frac{l}{|\vec{b} - \vec{a}|}$$

を k, l の連立方程式として解くことで、

$$k = \frac{|\vec{a}| |\vec{b}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}| - |\vec{b} - \vec{a}|}, \quad l = \frac{|\vec{a}| |\vec{b} - \vec{a}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}| - |\vec{b} - \vec{a}|}$$

となる。よって①へ代入することで、

$$\begin{aligned}\vec{p} = \vec{OP} &= \frac{|\vec{a}| |\vec{b}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}| - |\vec{b} - \vec{a}|} \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \\ &= \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}| - |\vec{b} - \vec{a}|} \vec{a} + \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}| - |\vec{b} - \vec{a}|} \vec{b} \quad \dots \text{答}\end{aligned}$$

※この点 P は三角形 OAB の傍心の 1 つである。

2.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \text{ について、}$$

$$(1) \quad XA = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x + \sqrt{3}y & -\sqrt{3}x + y \\ z + \sqrt{3}w & -\sqrt{3}z + w \end{pmatrix}$$

$$AX = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - \sqrt{3}z & y - \sqrt{3}w \\ \sqrt{3}x + z & \sqrt{3}y + w \end{pmatrix}$$

の計算から、

$$XA = AX \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{3}y = x - \sqrt{3}z \\ -\sqrt{3}x + y = y - \sqrt{3}w \\ z + \sqrt{3}w = \sqrt{3}x + z \\ -\sqrt{3}z + w = \sqrt{3}y + w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = w \\ w = x \\ -z = y \end{cases}$$

より、 $x = w, y + z = 0$

…答

(2) $X^2 = A$ が成立するとき、

$$XA = X X^2 = X^3 = X^2 X = AX$$

から $XA = AX$ は成立する。

…証明終り

(3) $X^2 = A$ のとき、(2)の結果、そして(1)の結果から

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \text{ とかける。このとき、}$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

となるので、

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$xy = -\frac{\sqrt{3}}{4} \quad \dots \textcircled{2}$$

が成立する。②から $x \neq 0$ より $y = -\frac{\sqrt{3}}{4x}$ を①へ代入することで

$$x^2 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{4x} \right)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 16x^4 - 8x^2 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 + 1)(4x^2 - 3) = 0$$

から、 $x^2 = \frac{3}{4}$ より $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

②より $y = \mp \frac{1}{2}$ (複号同順) となるので、条件を満たす X は、

$$X = \pm \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad \dots \text{答}$$

3.

$C: y = x^2$ …① について、 $y' = 2x$ となるので、

C 上の点 (t, t^2) での接線の方程式は、 $y = 2t(x - t) + t^2$ …②

(1) ②が点 P を通るとき、

$$q = 2t(p - t) + t^2 \Leftrightarrow t^2 - 2pt + q = 0$$

が成立し、これは t の二次方程式として $t = a, b$ を解にもつので、
解と係数の関係から

$$a + b = 2p, \quad ab = q \quad \dots \text{答}$$

(2) 点 P を通り、傾きが m の直線の方程式は、

$$y = m(x - p) + q \quad \dots \text{③}$$

とかけ、これと①の交点の x 座標が s, t なので、

$$x^2 = m(x - p) + q \Leftrightarrow x^2 - mx + mp - q = 0$$

について解と係数の関係から

$$s + t = m, \quad st = mp - q \quad \dots \text{答}$$

(3) 直線 AB の方程式は、

$$y = \frac{a^2 - b^2}{a - b}(x - a) + a^2 \Leftrightarrow y = (a + b)x - ab$$

であり、これと③とを連立させると(1)の結果とで、

$$(a + b)x - ab = mx + q - mp$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{ab + q - mp}{a + b - m} = \frac{2q - mp}{2p - m} \quad \dots \text{④} \quad (\text{直線 } AB, \text{ ③は平行でないので } a + b \neq m)$$

となるのでこれが点 Q の x 座標である。

そこで、③の傾きが m であることと

4点 P, T, Q, S が同一直線上にあることから

$$PS = (p - s)\sqrt{m^2 + 1}$$

$$PT = (p - t)\sqrt{m^2 + 1}$$

$$PQ = (p - u)\sqrt{m^2 + 1}$$

とかけるので、

$$\frac{1}{PS} + \frac{1}{PT} = \frac{2}{PQ}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(p - s)\sqrt{m^2 + 1}} + \frac{1}{(p - t)\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{2}{(p - u)\sqrt{m^2 + 1}}$$

$$\Leftrightarrow (p - t)(p - u) + (p - s)(p - u) = 2(p - s)(p - t) \quad \dots \text{⑤}$$

が成立するので、⑤を証明すればよい。

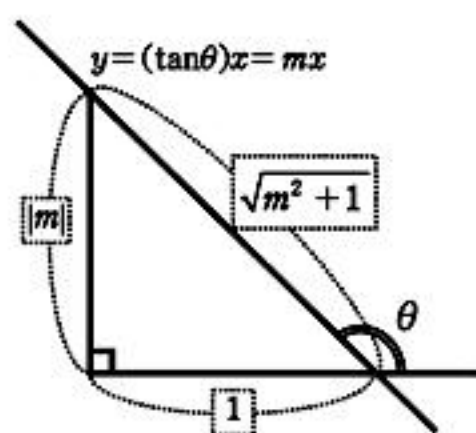
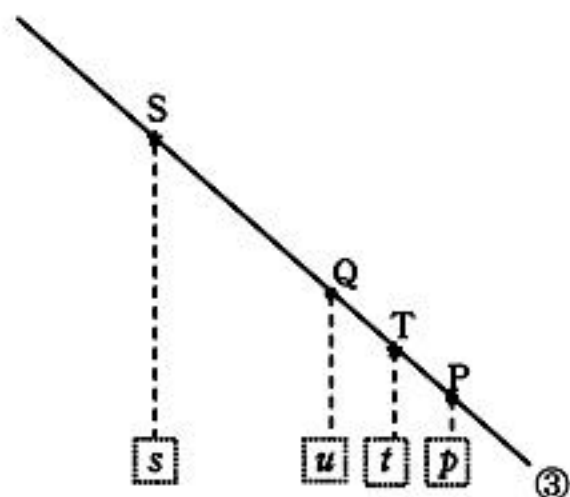
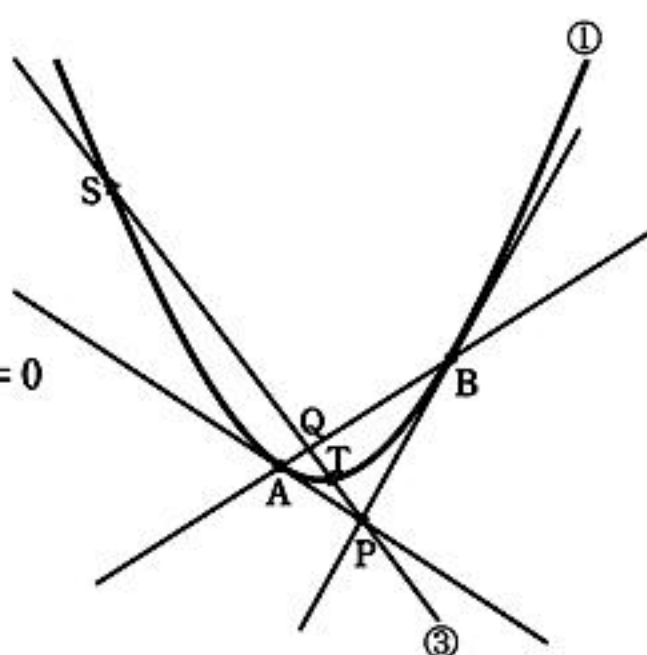
そこで⑤の左辺は、

$$\begin{aligned} (p - t)(p - u) + (p - s)(p - u) &= \{2p - (t + s)\}(p - u) \\ &= (2p - m) \left(p - \frac{2q - mp}{2p - m} \right) \\ &= p(2p - m) - (2q - mp) \\ &= 2(p^2 - q) \end{aligned}$$

また⑤の右辺は、

$$\begin{aligned} 2(p - s)(p - t) &= 2\{p^2 - (s + t)p + st\} \\ &= 2\{p^2 - mp + mp - q\} \\ &= 2(p^2 - q) \end{aligned}$$

となることから⑤は成立し、つまり $\frac{1}{PS} + \frac{1}{PT} = \frac{2}{PQ}$ が成立する。 …証明終り



4.

空間内に3点 $P(1,1,0)$, $Q(-1,1,0)$, $R(-1,1,2)$ がある。

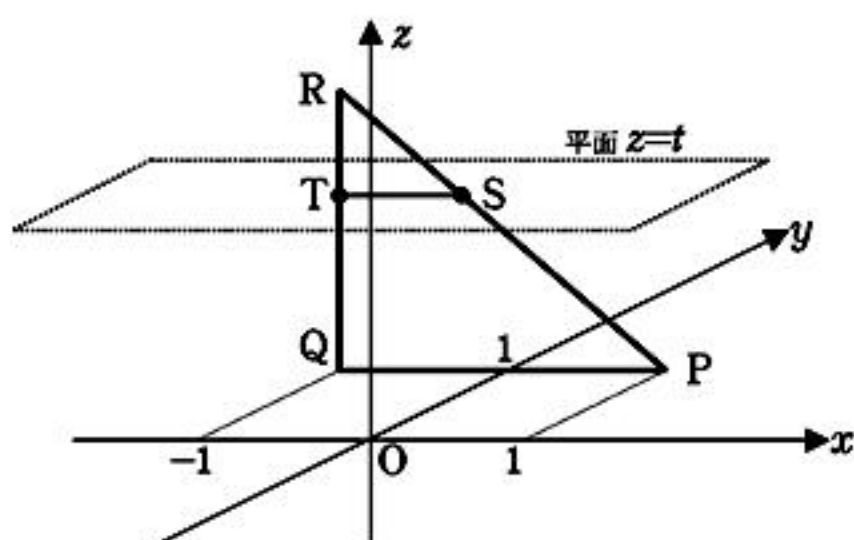
(1) この三角形は xy 平面に垂直に立っており、 xz 平面に平行な平面上にある。

そこで平面 $z=t$ と $\triangle PQR$ の2辺 PR , QR との交点をそれぞれ S , T とすると、

問題の交わりは線分 ST であり、 S , T はそれぞれ直線 PR , 直線 QR 上にあることから、

$$\begin{aligned}\vec{OS} &= \vec{OP} + k\vec{PR} \\ &= (1,1,0) + k(-2,0,2) \\ &= (1-2k, 1, 2k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{OT} &= \vec{OQ} + l\vec{QR} \\ &= (-1,1,0) + l(0,0,2) \\ &= (-1, 1, 2l)\end{aligned}$$



について S , T の z 座標は t なので

$$2k=t, \quad 2l=t \text{ より } k=\frac{t}{2}, \quad l=\frac{t}{2} \text{ となり、}$$

$$S(1-t, 1, t), \quad T(-1, 1, t) \quad \dots \text{答}$$

とかける。 ($0 < t < 2$)

※ $PQ=RQ=2$, $\angle PQR=90^\circ$ から三角形 PQR は直角三角形であることから

比を利用して座標を計算しても OK。しかし、いつでもきれいな図形が対象

というわけではないので上のような解答とした。

(2) 問題の回転体を平面 $z=t$ で切った切り口は、(1)で求めた2点 S , T を結んだ

線分 ST を点 $(0,0,t)$ を中心に回転させた図形となり、それは点 $(0,0,t)$ と線分 ST の

距離の最大値を M , 最小値を m として、

半径 M の円板から半径 m の円板をくり抜いたドーナツ型の図形(中心は一致したもの)となる。

よって、その面積を $S(t)$ とすると、

右の図2パターンから、

$$M = \sqrt{2},$$

$$m = \begin{cases} 1 & (0 < t \leq 1) \\ \sqrt{t^2 - 2t + 2} & (1 \leq t < 2) \end{cases}$$

$$S(t) = \pi M^2 - \pi m^2$$

$$= \begin{cases} \pi & (0 < t \leq 1) \\ \pi(2t - t^2) & (1 \leq t < 2) \end{cases}$$

となるので、

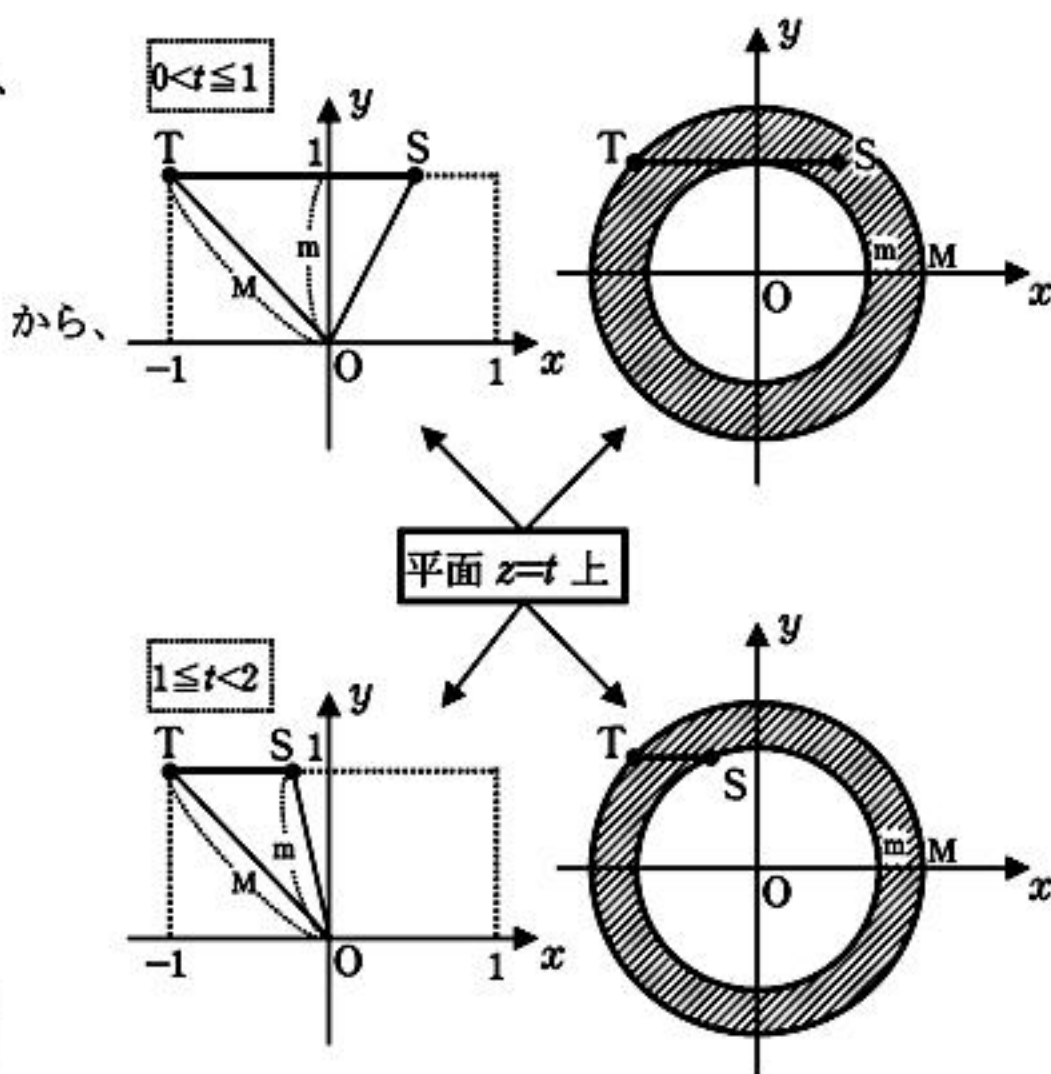
$$V = \int_0^1 \pi dt + \int_1^2 \pi(2t - t^2) dt$$

$$= \pi + \pi \left[t^2 - \frac{1}{3} t^3 \right]_1^2$$

$$= \pi + \pi \left\{ 2^2 - 1^2 - \frac{1}{3} (2^3 - 1^3) \right\}$$

$$= \frac{5}{3} \pi$$

…答



5.

(1) 実数係数の二次方程式 $x^2 + px + q = 0$ の解の一つが $\alpha = \frac{3+\sqrt{7}i}{2}$ のとき、

その共役な複素数である $\bar{\alpha} = \frac{3-\sqrt{7}i}{2}$ も解である。よって解と係数の関係から、

$$\begin{cases} -p = \frac{3+\sqrt{7}i}{2} + \frac{3-\sqrt{7}i}{2} \\ q = \frac{3+\sqrt{7}i}{2} \times \frac{3-\sqrt{7}i}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -3 \\ q = 4 \end{cases} \quad \dots \text{答}$$

(2) 実数係数の3次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ について、その解の一つが α であれば、 $\bar{\alpha}$ も解であり、するともう一つの解は実数解となり、それを $x = k$ とすると条件から $0 \leq k \leq 1$ を満たし、さらに(1)の結果を利用することで、

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= (x - \alpha)(x - \bar{\alpha})(x - k) \\ &= (x^2 - 3x + 4)(x - k) \\ &= x^3 - (k+3)x^2 + (3k+4)x - 4k \end{aligned}$$

とかける。これが x の恒等式になるので係数を比較することで

$$\begin{cases} a = -(k+3) \\ b = 3k+4 \\ c = -4k \end{cases}$$

が成立するが、今 a, b, c は整数であること、そして $0 \leq k \leq 1$ であることから、
 $k = 0, 1$

のみ条件を満たす。よって、

$$k = 0 \text{ のとき、 } (a, b, c) = (-3, 4, 0)$$

$$k = 1 \text{ のとき、 } (a, b, c) = (-4, 7, -4)$$

となる。 ...答