

$$(1) \quad x_{n+1} - a = -2x_n + 2a \quad (a \text{ は定数})$$

$$x_{n+1} - a = -2(x_n - a)$$

よって、数列 $\{x_n - a\}$ は初項 $x_1 - a$ 、公比 -2 の等比数列であり、

その一般項は

$$x_n - a = (-2)^{n-1} (x_1 - a)$$

$$\therefore x_n = (-2)^{n-1} (x_1 - a) + a \quad \cdots (\text{答})$$

$$(2) \quad C: y = f(x) = x^3 - 3ax^2 \quad (a \text{ は定数})$$

$$\text{点 } P_1(t_1, f(t_1)) \quad (t_1 \neq a)$$

$f'(x) = 3x^2 - 6ax$ より 点 P_1 における C の接線 l_1 は

$$l_1: y - f(t_1) = f'(t_1)(x - t_1)$$

$$l_1: y = (3t_1^2 - 6at_1)(x - t_1) + (t_1^3 - 3at_1^2)$$

$$l_1: y = (3t_1^2 - 6at_1)x - 2t_1^3 + 3at_1^2$$

l_1 と C の交点の x 座標は、 l_1 と C の方程式を連立させて、

y を消去した x の方程式を解いて求める。

$$x^3 - 3ax^2 = (3t_1^2 - 6at_1)x - 2t_1^3 + 3at_1^2$$

$$x^3 - 3ax^2 - (3t_1^2 - 6at_1)x + 2t_1^3 - 3at_1^2 = 0$$

l_1 と C が $x = t_1$ で接していることから、左辺は $(x - t_1)^2$ を因数にもち、

$$(x - t_1)^2 \{x - (3a - 2t_1)\} = 0$$

$$x \neq t_1 \text{ より } t_2 = 3a - 2t_1 \quad \cdots (\text{答})$$

(別解)

点 P_1 における C の接線 l_1 は直線で、 y 軸に平行ではないので

$y = mx + n$ (x の 1 次式) とおける。

l_1 と C の交点の x 座標は、 l_1 と C の方程式を連立させて

y を消去した x の方程式を解いて求める。

$$x^3 - 3ax^2 - (mx + n) = 0 \quad \cdots \textcircled{A}$$

l_1 と C は $x = t_1$ で接していることから、この 3 次方程式は

$x = t_1$ を重解としてもつので、3 次方程式 $\textcircled{A}$ の解と係数の関係から

$$t_1 + t_2 + t_3 = 3a. \quad \text{3 方角ち } t_2 = 3a - 2t_1 \quad \cdots (\text{答})$$

(3) (2) と同様の考察より

$$t_{n+1} = 3a - 2t_n$$

$$t_{n+1} - a = -2(t_n - a)$$

$$t_n = (-2)^{n-1} (t_1 - a) + a \quad (\because (1) \text{ の結果より})$$

「 $t_1, t_2, t_3, \dots$ はすべて異なる」ことを背理法を用いて証明する。

ある異なる 2 つの自然数 i, j ($i \neq j$) に対して、

$t_i = t_j$ と仮定する。

$$t_i = t_j \Leftrightarrow (-2)^{i-1} (t_1 - a) + a = (-2)^{j-1} (t_1 - a) + a$$

$$\Leftrightarrow \{(-2)^{i-1} - (-2)^{j-1}\} (t_1 - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2)^{i-1} \{1 - (-2)^{j-i}\} (t_1 - a) = 0 \quad \cdots \textcircled{B}$$

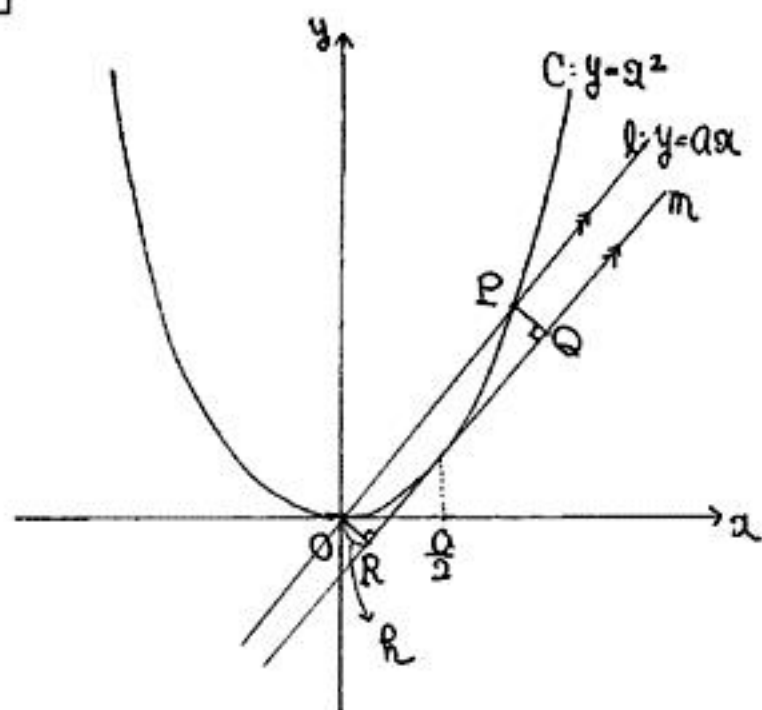
したがって、

$$(-2)^{i-1} \neq 0, \quad (i \neq j \text{ より }) 1 - (-2)^{j-i} \neq 0, \quad t_1 \neq a \text{ より } t_1 - a \neq 0.$$

よって、 $\textcircled{B}$ の左辺が 0 になることに矛盾する。よって、

「 $t_1, t_2, t_3, \dots$ はすべて異なる」

x 座標がすべて異なるので、「 $P_1, P_2, P_3, \dots$ はすべて異なる」 (証明終)



(1) $y = a^2x^2, y' = 2ax$

$m \perp C$ の接点の x 座標を t とする.

a^2 の t における微分係数は、点 (t, t^2) における C の接線の傾き $= a$ であるから

$$2t = a \Leftrightarrow t = \frac{a}{2}$$

よって、 m の方程式は

$$y - t^2 = 2t(x - t)$$

$$2tx - y - t^2 = 0 \quad \text{よって} \quad ax - y - \frac{a^2}{4} = 0 \quad \text{--- (答)}$$

(2) 原点 O と m の距離を R として

$$R = \frac{|a \cdot 0 - 0 - \frac{a^2}{4}|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \frac{a^2}{4\sqrt{a^2 + 1}} \quad \text{--- (答)}$$

(3) $P(a, a^2)$ であるから、 $OP = a\sqrt{a^2 + 1}$. ($a > 0$ より)

$OR = R$ より、

$$\square OPR = OP \cdot OR = a\sqrt{a^2 + 1} \cdot \frac{a^2}{4\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{a^3}{4} = 2.$$

$$a^3 = 8$$

$$(a - 2)(a^2 + 2a + 4) = 0$$

$$a^2 + 2a + 4 = (a + 1)^2 + 3 > 0 \quad \text{より} \quad a = 2 \quad \text{--- (答)}$$

(> 0)

(1) 1, 2, 3 の 3 種類の数字から重複を許して 3 つ選ぶ選び方を列挙すると

$$\boxed{(1, 1, 1)}, (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 2), \boxed{(1, 2, 3)}, (1, 3, 3), \\ \boxed{(2, 2, 2)}, (2, 2, 3), (2, 3, 3), \\ \boxed{(3, 3, 3)}$$

(選び方の総数は $3H_3 = {}_5C_3 = 10$ 通りなので、これすべてである)

和が 3 の倍数となる組合せは $\boxed{\quad}$ で囲ったもの。 3 つのうち

$$(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (1, 2, 3) \quad \cdots (\text{答})$$

(2) 9 枚のカードをすべて区別して

$$1A, 1B, 1C, 2A, 2B, 2C, 3A, 3B, 3C$$

と置く。

$$3 \text{ 枚のカードを度々選び方の総数は } {}_9C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 \text{ 通りで}$$

これは同様に確かめたい。

和が 3 の倍数になるのは

$$(1, 1, 1) \longrightarrow (1A, 1B, 1C) \text{ の } 1 \text{ 通り}$$

$$(2, 2, 2) \longrightarrow (2A, 2B, 2C) \text{ の } 1 \text{ 通り}$$

$$(3, 3, 3) \longrightarrow (3A, 3B, 3C) \text{ の } 1 \text{ 通り}$$

$$(1, 2, 3) \longrightarrow 1, 2, 3 \text{ ともに } A, B, C \text{ の } 3 \text{ 通りずつあるので } 3^3 = 27 \text{ 通り}$$

よって、求める確率は

$$\frac{1+1+1+27}{84} = \frac{30}{84} = \frac{5}{14} \quad \cdots (\text{答})$$