

1.

(1)

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AC}=\vec{c}, \overrightarrow{AD}=\vec{d}$$

とおくと,

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\vec{d}-\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AO}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}-\frac{1}{2}\vec{b}$$

よって,

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OR}$$

(答) $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OR}$

(2)

$$\overrightarrow{AE}=s\vec{c} \quad (0 \leq s \leq 1)$$

$$\overrightarrow{BF}=t\overrightarrow{BD}=t(\vec{d}-\vec{b}) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

とおける。EF の中点を M とおくと,

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})$$

$$=\frac{1}{2}\{(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AO})+(\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BO})\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{s\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}+t(\vec{d}-\vec{b})+\frac{1}{2}\vec{b}\right\}$$

$$=s\cdot\frac{1}{2}\vec{c}+t\cdot\frac{1}{2}(\vec{d}-\vec{b})$$

$$=s\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{OR}$$

(1)と合わせて、 $\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OM}$ は $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OR}$ の一次結合で表されるので、

点 Q, M は 3 点 O, P, R を含む平面上にある。すなわち、

点 M は 4 点 O, P, Q, R を含む平面上にある。

(証明完了)

- (1) $P(X, Y)$ とおくと、点 P は第 1 象限内の点であるから、

$$\begin{cases} X > 0 \\ Y > 0 \end{cases} \dots \textcircled{1}$$

y 軸上に底辺を持つ二等辺三角形を $\triangle OPQ$ とすると、

$$Q(0, 2Y)$$

$$OP = PQ = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad OQ = 2Y$$

$\triangle OPQ$ の周の長さが 2 であるから

$$OP + PQ + OQ = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{X^2 + Y^2} + Y = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + Y^2 = (1 - Y)^2 \\ 1 - Y \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = \frac{1}{2}(1 - X^2) \dots \textcircled{2} \\ 1 \geq Y \end{cases}$$

①かつ②が点 $P(X, Y)$ の軌跡である。 $Y > 0$ であるから、 (X, Y) を (x, y) として

$$T: y = \frac{1}{2}(1 - x^2) \quad (0 < x < 1)$$

$$(\text{答}) \quad T: y = \frac{1}{2}(1 - x^2) \quad (0 < x < 1)$$

(2)

直線 $l: y = a(x - 1)$ は点 $(1, 0)$ を通り、傾き a の直線である。

軌跡 T と直線 l が第 1 象限内に交点を持つ、すなわち

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}(1 - x^2) \\ y = a(x - 1) \end{cases} \text{が } x > 0, y > 0 \text{ に実数解を持つ}$$

ということを考えると、 $0 < x < 1$ であるから、この範囲で交われば、 y 座標は必ず正となり、

$$\frac{1}{2}(1 - x)(1 + x) = a(x - 1) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x + 1) = a$$

が $0 < x < 1$ で交点を持つ条件を考えることに帰着する。よって、

$$-1 < a < -\frac{1}{2}$$

$$(\text{答}) \quad -1 < a < -\frac{1}{2}$$

3.

(1)

$$f(x) = e^x - x$$

より,

$$f'(x) = e^x - 1$$

よって次の増減表を得る。

x	$\dots$	0	$\dots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$

$$f(0) = e^0 - 0 = 1$$

より,

$$f(x) \geq 1$$

(証明完了)

(2)

(1)より, 曲線 $y = f(x)$ は $y > 0$ の領域にある。よって,

$y = f(x)$, $x = t$, $x = t-1$, x 軸で囲まれた図形の面積 $S(t)$ は,

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{t-1}^t f(x) dx \\ &= \int_{t-1}^t (e^x - x) dx \\ &= \left[e^x - \frac{1}{2}x^2 \right]_{t-1}^t \\ &= e^t - e^{t-1} - t + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(答) $e^t - e^{t-1} - t + \frac{1}{2}$

(3)

$$S'(t) = e^t - e^{t-1} - 1 = e^t \left(1 - \frac{1}{e} \right) - 1$$

$u = e^t$ は単調増加関数であるから,

$$e^t \left(1 - \frac{1}{e} \right) - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \log \frac{e}{e-1}$$

なる t の前後で, $S'(t)$ の符号が負から正へと変わる。

よって, 次の増減表を得る。

t	$\dots$	$\log \frac{e}{e-1}$	$\dots$
$S'(t)$	$-$	0	$+$
$S(t)$	$\searrow$	$S\left(\log \frac{e}{e-1}\right)$	$\nearrow$

よって $S(t)$ が最小となるのは

$$t = \log \frac{e}{e-1} = 1 - \log(e-1)$$

のときで,

$$\begin{aligned} S(1 - \log(e-1)) &= e^{1 - \log(e-1)} - e^{-\log(e-1)} - 1 + \log(e-1) + \frac{1}{2} \\ &= \log(e-1) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(答) $\log(e-1) + \frac{1}{2}$

4.

$$(1) \quad C: \begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases} \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

より

$$\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$$

であるから,

$$\begin{aligned} y &= \sin 2t \\ &= 2 \sin t \cos t \\ &= 2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} \\ &= 2x \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad y = 2x\sqrt{1-x^2}$$

$$(2) \quad x \text{ の変域は } 0 \leq x \leq 1 \text{ であり,}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2\sqrt{1-x^2} + 2x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} (1-2x^2) \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} (1+\sqrt{2}x)(1-\sqrt{2}x) \end{aligned}$$

より, 次の増減表を得る。

x	0	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	1
$\frac{dy}{dx}$		+	0	-	
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

よって, D の面積 S は

$$S = \int_0^1 y dx = \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2} dx$$

の計算式により求められ,

$$x^2 = t$$

と置換することによって,

$$S = \int_0^1 \sqrt{1-t} dt = \left[-\frac{2}{3} (1-t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{2}{3}$$

$$(3) \quad 0 \leq y \leq 1 \text{ を満たす } y \text{ に対し,}$$

$$y = 2x\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow 4x^4 - 4x^2 + y^2 = 0$$

を満たす第 1 象限の x を $x_1 < x_2$ とおくと

$$x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{2}$$

より

$$\begin{cases} x_1^2 = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{2} \\ x_2^2 = \frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{2} \end{cases}$$

となる。これより, 求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 x_2^2 dy - \pi \int_0^1 x_1^2 dy \\ &= \pi \int_0^1 (x_2^2 - x_1^2) dy \\ &= \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy \\ &= \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi^2}{4}$$

5.

(1)

1, 2, 3 の 3 種類の数字から重複を許して 3 つ選ぶ選び方は、

$${}_3H_3 = {}_3C_3 = 10 \text{ 通り}$$

である。このうち、和が 3 の倍数となる組み合わせは

$$(1,1,1), (2,2,2), (3,3,3), (1,2,3)$$

の 4 通りである。

$$(\text{答}) \quad (1,1,1), (2,2,2), (3,3,3), (1,2,3)$$

(2)

9 枚のカードを全て区別して

$$1_A, 1_B, 1_C, 2_A, 2_B, 2_C, 3_A, 3_B, 3_C$$

とおく。3 枚のカードを選ぶ選び方の総数は

$${}_9C_3 = 84 \text{ 通り}$$

であり、これらは同様に確からしい。和が 3 の倍数となるのは

$$(1,1,1) \Rightarrow (1_A, 1_B, 1_C) \text{ の } 1 \text{ 通り}$$

$$(2,2,2) \Rightarrow (2_A, 2_B, 2_C) \text{ の } 1 \text{ 通り}$$

$$(3,3,3) \Rightarrow (3_A, 3_B, 3_C) \text{ の } 1 \text{ 通り}$$

$$(1,2,3) \Rightarrow 1, 2, 3 \text{ とともに } A, B, C \text{ の } 3 \text{ 通りずつあるので } 3^3 = 27 \text{ 通り}$$

よって求める確率は

$$\frac{1+1+1+27}{84} = \frac{5}{14}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{14}$$