

1.

 a, θ, C は定数で $a \neq 0$

$$f(x) = ax^2 + \theta x + C = a\left(x + \frac{\theta}{2a}\right)^2 - \frac{\theta^2}{4a} + C$$

$$f'(x) = 2a\left(x + \frac{\theta}{2a}\right)$$

$$\begin{aligned} (1) \quad f(\alpha) = f(\beta) &\Rightarrow a\left(\alpha + \frac{\theta}{2a}\right)^2 - \frac{\theta^2}{4a} + C = a\left(\beta + \frac{\theta}{2a}\right)^2 - \frac{\theta^2}{4a} + C \\ &\Rightarrow a\left(\alpha + \frac{\theta}{2a}\right)^2 = a\left(\beta + \frac{\theta}{2a}\right)^2 \quad [\text{両辺に } \frac{\theta^2}{4a} - C \text{ を加える}] \\ &\Rightarrow 4a^2\left(\alpha + \frac{\theta}{2a}\right)^2 = 4a^2\left(\beta + \frac{\theta}{2a}\right)^2 \quad [\text{両辺に } 4a^2 \neq 0 \text{ をかける}] \\ &\Rightarrow 2a\left(\alpha + \frac{\theta}{2a}\right) = \pm 2a\left(\beta + \frac{\theta}{2a}\right) \\ &\Rightarrow \left|2a\left(\alpha + \frac{\theta}{2a}\right)\right| = \left|2a\left(\beta + \frac{\theta}{2a}\right)\right| \\ &\Rightarrow |f'(\alpha)| = |f'(\beta)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad |f'(\alpha)| = |f'(\beta)| &\Rightarrow \left|2a\left(\alpha + \frac{\theta}{2a}\right)\right| = \left|2a\left(\beta + \frac{\theta}{2a}\right)\right| \\ &\Rightarrow 4a^2\left(\alpha + \frac{\theta}{2a}\right)^2 = 4a^2\left(\beta + \frac{\theta}{2a}\right)^2 \quad [\text{両辺を2乗する}] \\ &\Rightarrow a\left(\alpha + \frac{\theta}{2a}\right)^2 = a\left(\beta + \frac{\theta}{2a}\right)^2 \quad [\text{両辺を } 4a^2 \neq 0 \text{ で割る}] \\ &\Rightarrow a\left(\alpha + \frac{\theta}{2a}\right)^2 - \frac{\theta^2}{4a} + C = a\left(\beta + \frac{\theta}{2a}\right)^2 - \frac{\theta^2}{4a} + C \quad [\text{両辺に } -\frac{\theta^2}{4a} + C \text{ を加える}] \\ &\Rightarrow f(\alpha) = f(\beta) \end{aligned}$$

[補足]

この命題が2次関数 $y = f(x)$ のグラフにおいて何を意味するかを考えると、
 $f(x)$ を平方完成して問題を解くことは、この問題の本質に触れることである。
 (1), (2) をまとめて同値変形で示してもよい。

2.

$$S = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

n を自然数とする.

- (1) $n = 4m$ のとき, $S = \frac{4m(4m+1)}{2} = 2m(4m+1)$ より S は偶数
 $n = 4m-1$ のとき, $S = \frac{(4m-1)4m}{2} = 2m(4m-1)$ より S は偶数
 よって示された.

- (2) $n = 4m-2$ のとき, $S = \frac{(4m-2)(4m-1)}{2} = (2m-1)(4m-1)$
 $2m-1, 4m-1$ はともに奇数であるから,
 その積である S は奇数.

$n = 4m-3$ のとき, $S = \frac{(4m-3)(4m-2)}{2} = (2m-1)(4m-3)$
 $2m-1, 4m-3 = 2(2m-1)-1$ はともに奇数であるから,
 その積である S は奇数.

(1) を合わせて, 題意は示された.

(補足) 次の3つの条件

(i) 場合分け $p_1, p_2, \dots$ により3つの場合が尽くされている.

(ii) $p_1 \Rightarrow q_1, p_2 \Rightarrow q_2, \dots$ がすべて真である.

(iii) $q_1, q_2, \dots$ の2の組合せも成立しない.

が成立するとき, $q_1 \Rightarrow p_1, q_2 \Rightarrow p_2, \dots$ も真である.

このような証明法を転換法という.

間接証明法の一つで, 命題の逆を証明するために用いられる方法である.

(2) では, 次のように考えている.

$p_1: n$ を4で割った余りが0または3 $q_1: S$ は偶数

$p_2: n$ を4で割った余りが1または2 $q_2: S$ は奇数

(3) $n = 8m-5$ のとき, $S = \frac{(8m-5)(8m-4)}{2}$
 $= 2(2m-1)\{4(2m-1)-1\}$
 $2m-1, 4(2m-1)-1$ は奇数であるから,
 S は偶数であるが4の倍数でない.

$n = 8m-4$ のとき, $S = \frac{(8m-4)(8m-3)}{2}$
 $= 2(2m-1)\{4(2m-1)+1\}$
 $2m-1, 4(2m-1)+1$ は奇数であるから
 S は偶数であるが4の倍数でない.

よって示された.

(補足) S が4の倍数であるためには, S が偶数であることが必要であるから
 n を4で割った余りは0または3であることが必要である, すなわち
 n を8で割った余りは0, 3, 4, 7のいずれかであることが必要である.
 よって,

「 S が4の倍数ならば, n を8で割った余りが0または7である」

ことを示すには, 上記の他に

「 $n = 8m, 8m-1$ のときに S が4の倍数である」

ことを示さねばよい.

3.

- (1) 円 $C: (x-a)^2 + (y-b)^2 = 2C^2$ と直線 $l: y=x$ が共有点をもたない条件は
(C の中心 (a, b) と l の距離) $>$ (C の半径)

$$\frac{|a-b|}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}|C|$$

よって

$$|a-b| > 2|C|$$

である.

- (2) $1 \leq a \leq 6, 1 \leq b \leq 6$ であるから

$$-5 \leq a-b \leq 5 \text{ よって } |a-b| \leq 5. \quad \text{---①}$$

よって, $C \geq 3$ のとき, 条件を満たす (a, b, C) の組は存在しない.

$C=2$ のとき,

$$|a-b| > 4 \text{ と ① より } |a-b|=5.$$

これを満たす (a, b) は $(1, 6), (6, 1)$ の 2通り

$C=1$ のとき

$$|a-b| > 2 \text{ と ① より } |a-b|=5, 4, 3$$

$|a-b|=5$ のとき, $(a, b) = (1, 6), (6, 1)$ の 2通り

$|a-b|=4$ のとき, $(a, b) = (1, 5), (5, 1), (2, 6), (6, 2)$ の 4通り

$|a-b|=3$ のとき, $(a, b) = (1, 4), (4, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 6), (6, 3)$ の 6通り

各場合は等確率 $\frac{1}{6^2} = \frac{1}{216}$ で起きるので

求める確率は $\frac{1}{216} (2+2+4+6) = \frac{7}{108}$ である.