

1.

(1) $p: x > 0$ かつ $xy > 0$, $q: y > 0$ とする.

$xy > 0 \iff (x > 0 \text{ かつ } y > 0) \text{ または } (x < 0 \text{ かつ } y < 0)$
であるから,

$$p \iff x > 0 \text{ かつ } y > 0$$

よって,

$$p \implies q \text{ は真である.}$$

(2) $p: x \geq 0$ かつ $xy \geq 0$, $q: y \geq 0$ とする.

「 $x = 0$ かつ $y < 0$ 」は p は満たすが q は満たさないから
 $p \implies q$ の反例であり, $p \implies q$ は偽である.

(3) $p: x + y \geq 0$ かつ $xy \geq 0$, $q: y \geq 0$ とする.

背理法で証明する. すなわち, p かつ $\overline{q}$ 仮定として矛盾を導く.

$$\overline{q}: y < 0 \text{ である.}$$

$$xy \geq 0 \text{ であるから } x \leq 0$$

よって, $x + y < 0$ となり, $x + y \geq 0$ に矛盾する.

よって, $p \implies q$ は真である.

[補足]

一般に, 2つの条件 p, q について

条件 p を満たすものの全体の集合 P

条件 q を満たすものの全体の集合 Q

とすると,

$$「p \implies q \text{ が真である}」 \iff P \subset Q$$

が成り立つ. よって, 各問において, p, q の表わす領域を P, Q
として, $P \subset Q$ となっているかどうかを調べてもよい.

2.

点 A を中心とする円を C_A , 半径 r_A , 2 点 A, B 間の距離を d_{AB} などと記す.

(1) A, B の 2 点を中心とする円が接する条件は

$$(i) \text{ 外接する } r_A + r_B = d_{AB}$$

$$(ii) \text{ 内接する } |r_A - r_B| = d_{AB}$$

であるが, $r_A = r_B = r$, $d_{AB} = 2$ より, (ii) の場合はなく,

(i) の場合について, $2r = 2 \iff r = 1$ である.

$$(2) \quad r_C + r_A = 2 = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = d_{CA}$$

$$r_C + r_B = 2 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = d_{CB}$$

であるから, 半径 $r = 1$ の円 C_C は C_A, C_B に外接する.

(3) 直線 l の方程式を $l: ax + by + c = 0$ (ただし, $a^2 + b^2 \neq 0$) とし
点 A と l の距離を h_A などと記す.

A, B, C の 3 点を中心とする 3 つの円が直線 l に接する条件は

$$h_A = r_A \text{ かつ } h_B = r_B \text{ かつ } h_C = r_C$$

$$r_A = r_B = r_C = s, \quad h_A = \frac{|a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad h_B = \frac{|-a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad h_C = \frac{|\sqrt{3}b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

であるから,

$$\begin{cases} \frac{|a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = s & \dots\dots ① \\ \frac{|-a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = s & \dots\dots ② \\ \frac{|\sqrt{3}b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = s & \dots\dots ③ \end{cases}$$

①, ②より

$$|a+c| = |-a+c| \quad \dots\dots ④$$

$$\iff a+c = -a+c \text{ または } a+c = a-c$$

$$\iff a=0 \text{ (}\dots\dots ⑥\text{) または } c=0 \text{ (}\dots\dots ⑦\text{)}$$

①, ③より

$$|a+c| = |\sqrt{3}b+c| \quad \dots\dots ⑤$$

$$①\text{かつ}②\text{かつ}③ \iff ①\text{かつ}④\text{かつ}⑤$$

$$\iff (⑥\text{または}⑦) \text{ かつ } ⑤\text{かつ}①$$

$$\iff (⑥\text{かつ}⑤\text{かつ}①) \text{ または } (⑦\text{かつ}⑤\text{かつ}①)$$

と考える.

(i) ⑥: $a=0$ のとき

$$⑤ \iff |c| = |\sqrt{3}b+c|$$

$$\iff c = \sqrt{3}b+c \text{ または } c = -(\sqrt{3}b+c)$$

$$\iff b=0 \text{ または } 2c = -\sqrt{3}b$$

$$a^2 + b^2 \neq 0 \text{ より } b \neq 0 \text{ であり, } c = -\frac{\sqrt{3}}{2}b$$

$$\text{したがって, } l: y - \frac{\sqrt{3}}{2}x = 0 \text{ で}$$

$$②\text{より } s = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ である.}$$

(ii) ⑦: $c=0$ のとき

$$⑤ \iff |a| = |\sqrt{3}b|$$

$$\iff a = \pm\sqrt{3}b$$

$$a^2 + b^2 \neq 0 \text{ より } b \neq 0 \text{ である.}$$

$$\text{したがって, } l: \pm\sqrt{3}x + y = 0 \text{ で}$$

$$①\text{より } s = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ である.}$$

(i)(ii)より, l の方程式は

$$y = \pm\sqrt{3}x, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$\text{で, } l \text{ がどの場合も } s = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ である.}$$

3.

$$S = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

m を自然数とする.

$$(1) \quad n = 4m \text{ のとき, } S = \frac{4m(4m+1)}{2} = 2m(4m+1) \text{ より } S \text{ は偶数}$$

$$n = 4m-1 \text{ のとき, } S = \frac{(4m-1)4m}{2} = 2m(4m-1) \text{ より } S \text{ は偶数}$$

よって示された.

$$(2) \quad n = 4m-2 \text{ のとき, } S = \frac{(4m-2)(4m-1)}{2} = (2m-1)(4m-1)$$

$2m-1, 4m-1$ はともに奇数であるから,

その積である S は奇数

$$n = 4m-3 \text{ のとき, } S = \frac{(4m-3)(4m-2)}{2} = (2m-1)(4m-3)$$

$2m-1, 4m-3 = 2(2m-1)-1$ はともに奇数で

あるから, その積である S は奇数

(1) を合わせて, 題意は示された.

[補足] 次の 3 つの条件

(i) 場合分け $p_1, p_2, \dots$ によりすべての場合が尽くされている.

(ii) $p_1 \Rightarrow q_1, p_2 \Rightarrow q_2, \dots$ がすべて真である.

(iii) $q_1, q_2, \dots$ のどの組合せも両立しない.

が成立するとき, $q_1 \Rightarrow p_1, q_2 \Rightarrow p_2, \dots$ も真である.

このような証明法を転換法という.

間接証明法の一つで, 命題の逆を証明するために使われる方法である.

(2) では, 次のように考えている.

$p_1: n$ を 4 で割った余りが 0 または 3 $q_1: S$ は偶数

$p_2: n$ を 4 で割った余りが 1 または 2 $q_2: S$ は奇数

(3) 最初に, n が自然数のとき n と $n+1$ は互いに素 (最大公約数が 1)

である. (.....①)

ことを示す.

n と $n+1$ の最大公約数を d (≥ 1) とすると, ある自然数 k, l が存在して,

$$n+1 = kd, \quad n = ld$$

とおける. すると,

$$1 = d(k-l)$$

となり, d は 1 の正の約数であるから, $d = 1$

よって, n と $n+1$ は互いに素である.

$S = 4m$ とおくと, $n(n+1) = 8m = 2^3 m$ で, 2 は素数であるから

3 個の素因数 2 が $n, n+1$ のどちらかに振り分けられる.

(i) n が $2^3 (= 8)$ の倍数のとき, n を 8 で割った余りは 0

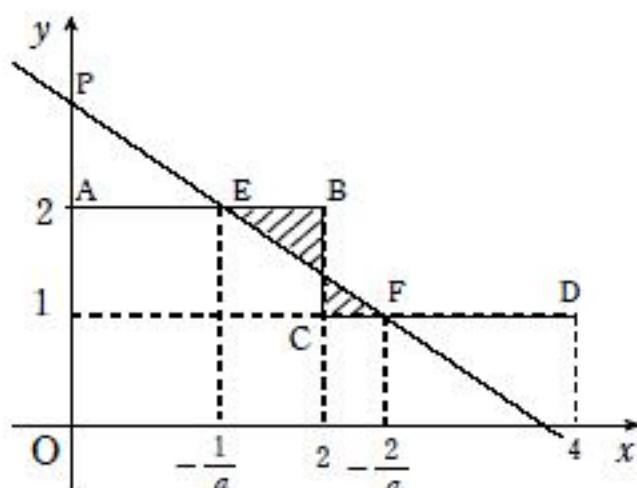
(ii) $n+1$ が $2^3 (= 8)$ の倍数のとき, n を 8 で割った余りは 7

(iii) n が 2 の倍数, $n+1$ が $2^2 (= 4)$ の倍数

(iv) n が $2^2 (= 4)$ の倍数, $n+1$ が 2 の倍数

であるが, (iii), (iv) は $n, n+1$ の最大公約数が 2 以上となり①に反する. よって示された.

4.



- (1) $l: y = ax + 3$ である. $f(x) = ax + 3$ とおく.

l が線分 BC と交わり, その交点が B, C と異なる条件は

$$1 < f(2) < 2 \iff 1 < 2a + 3 < 2$$

$$\iff -1 < a < -\frac{1}{2} \quad \text{である.}$$

- (2) l と線分 AB の交点 E の x 座標 $= -\frac{1}{a}$

$$l \text{ と線分 } CD \text{ の交点 } F \text{ の } x \text{ 座標} = -\frac{2}{a}$$

である.

$$V_1 = \pi \int_{-\frac{1}{a}}^2 \{2^2 - (ax + 3)^2\} dx$$

$$= \pi \left\{ 4 \left(2 + \frac{1}{a} \right) - \left[\frac{1}{3a} (ax + 3)^3 \right]_{-\frac{1}{a}}^2 \right\}$$

$$= \pi \left\{ 4 \left(2 + \frac{1}{a} \right) - \frac{1}{3a} (2a + 3)^3 + \frac{1}{3a} \cdot 2^3 \right\}$$

$$= \pi \left\{ 8 + \left(4 + \frac{8}{3} \right) \frac{1}{a} - \frac{1}{3a} (2a + 3)^3 \right\}$$

$$V_2 = \pi \int_2^{-\frac{2}{a}} \{(ax + 3)^2 - 1^2\} dx$$

$$= \pi \left\{ \left[\frac{1}{3a} (ax + 3)^3 \right]_2^{-\frac{2}{a}} - 2 \left(-\frac{1}{a} - 1 \right) \right\}$$

$$= \pi \left\{ \frac{1}{3a} \cdot 1^3 - \frac{1}{3a} (2a + 3)^3 + 2 \left(\frac{1}{a} + 1 \right) \right\}$$

$$= \pi \left\{ 2 + \left(2 + \frac{1}{3} \right) \frac{1}{a} - \frac{1}{3a} (2a + 3)^3 \right\}$$

$$V = V_1 + V_2$$

$$= \pi \left\{ 10 + \frac{9}{a} - \frac{2}{3a} (2a + 3)^3 \right\}$$

$$= \pi \left\{ 10 + \frac{9}{a} - \frac{2}{3a} (8a^3 + 36a^2 + 54a + 27) \right\}$$

$$= -\pi \left\{ \frac{16}{3} a^2 + 24a + 26 + \frac{9}{a} \right\}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \frac{1}{\pi} \frac{dV}{da} &= -\frac{32}{3} a - 24 + \frac{9}{a^2} \\ &= -\frac{1}{3a^2} (32a^3 + 72a^2 - 27) \\ &= -\frac{1}{3a^2} (4a + 3)(8a^2 + 12a - 9) \end{aligned}$$

$$g(a) = 8a^2 + 12a - 9 = 8 \left(a + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{27}{2} \quad \text{とおくと,}$$

$$-1 < a < -\frac{1}{2} \text{ のとき, } -\frac{1}{4} < a + \frac{3}{4} < \frac{1}{4} \text{ より,}$$

$$-\frac{27}{2} \leq g(a) < -13 < 0 \quad \text{であるから,}$$

$$-1 < a < -\frac{1}{2} \text{ における } V \text{ の増減は次のようになる.}$$

a	-1		$-\frac{3}{4}$		$-\frac{1}{2}$
$\frac{dV}{da}$		$-$	0	$+$	
V		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

したがって, $a = -\frac{3}{4}$ のとき V は最小値をとる.

[補足] $a = -\frac{3}{4}$ のとき, $V = \pi$ である.

5.

(1) 2項定理により

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k x^k \quad \dots\dots ①$$

①において、 $x=1$ とおくと、

$$2^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k \quad \dots\dots ②$$

①において、 $x=-1$ とおくと、

$$0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k {}_n C_k \quad \dots\dots ③$$

である。

(2) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。

$EJ = JE = J$, $J^1 = J$, $J^2 = E$ より帰納的に
 m を自然数として

$$\begin{cases} k=2m-1 \text{ のとき, } J^k = J \\ k=2m \text{ のとき, } J^k = E \end{cases}$$

である。

[補足] 行列の n 乗の問題として普通に解いてみる。

$J^2 = E$ から

$J(J+E) = J+E$ より帰納的に

$$J^{k-1}(J+E) = J+E \quad \dots\dots ④$$

$J(J-E) = -(J-E)$ より帰納的に

$$J^{k-1}(J-E) = (-1)^{k-1}(J-E) \quad \dots\dots ⑤$$

④+⑤ (④と⑤の辺々を加えて)

$$2J^k = \{1 - (-1)^{k-1}\}E + \{1 + (-1)^{k-1}\}J$$

$$\therefore J^k = \frac{1}{2}\{1 + (-1)^k\}E + \frac{1}{2}\{1 - (-1)^k\}J$$

(3) ②+③を考えると

$$2^n = \sum_{k=0}^n \{1 + (-1)^k\} {}_n C_k \quad \dots\dots ⑥$$

(i) $n=2m-1$ のとき、⑥の和で、 $k=0, 2, \dots, 2(m-1)$ のときに
値が0でないから、

$$2^{2m-2} = \sum_{j=0}^{m-1} {}_{2m-1} C_{2j} \quad \dots\dots ⑦$$

(ii) $n=2m$ のとき、⑥の和で、 $k=0, 2, \dots, 2m$ のときに
値が0でないから、

$$2^{2m-1} = \sum_{j=0}^m {}_{2m} C_{2j} \quad \dots\dots ⑧$$

である。

$M_j (j=1, 2, \dots, n)$ のうち少なくとも1つが $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ であると

積は O になるから、

$$M_j \neq O \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

である。以下、この条件の下で考える。 $k=1, 2, \dots, n$ として

$M_j = J$ となる j が $1, 2, \dots, n$ の中に k 個

($M_j = E$ となる j が $1, 2, \dots, n$ の中に $n-k$ 個)

あるとすると、 $E^2 = J^2 = E$, $EJ = JE = J$ より

$$M_1 M_2 \dots M_n = J^k$$

であるから、(2)より

$M_1 M_2 \dots M_n = E$ となる条件は k が偶数であることである。

M_j が E, J, O になる確率はそれぞれ $\frac{1}{3}$ であるから、求める確率は、

(i) $n=2m-1$ のとき、

$0, 1, \dots, n$ の中の偶数は $0, 2, \dots, 2(m-1)$ があるから

$$\begin{aligned} p_n = p_{2m-1} &= \sum_{j=0}^{m-1} {}_{2m-1} C_{2j} \left(\frac{1}{3}\right)^{2m-1} \\ &= 2^{2m-2} \left(\frac{1}{3}\right)^{2m-1} \quad (\because ⑦) \\ &= \frac{2^{n-1}}{3^n} \end{aligned}$$

(ii) $n=2m$ のとき、

$0, 1, \dots, n$ の中の偶数は $0, 2, \dots, 2m$ があるから

$$\begin{aligned} p_n = p_{2m} &= \sum_{j=0}^m {}_{2m} C_{2j} \left(\frac{1}{3}\right)^{2m} \\ &= 2^{2m-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2m} \quad (\because ⑧) \\ &= \frac{2^{n-1}}{3^n} \end{aligned}$$

したがって、

$$p_n = \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad (n=1, 2, \dots)$$

である。

[補足]

わかりやすくするために n の偶奇で場合分けしたが、

$[x]$ を x を越えない最大の整数として、⑥は

$$\begin{aligned} 2^n &= \sum_{k=0}^n \{1 + (-1)^k\} {}_n C_k \\ &= 2 \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} {}_n C_{2j} \end{aligned}$$

p_n は

$$p_n = 2 \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} {}_n C_{2j} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

と表わされる。

同様にして、②-③を考えると、

$$\begin{aligned} 2^n &= \sum_{k=0}^n \{1 - (-1)^k\} {}_n C_k \\ &= 2 \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} {}_n C_{2j+1} \end{aligned}$$

であるから、 $M_1 M_2 M_3 \dots M_n = J$ となる確率 q_n も

$$q_n = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} {}_n C_{2j+1} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

である。

一般に、 $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n$ に対して

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{2k} x^{2k} = \frac{1}{2} \{f(x) + f(-x)\}$$

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} a_{2k+1} x^{2k+1} = \frac{1}{2} \{f(x) - f(-x)\}$$

である。