

1. $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ と記す. $|\overrightarrow{a}| = 1$ である.

$$(\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{a})^2 + |\overrightarrow{p} - (\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{a})\overrightarrow{a}|^2 \leq 1 \dots\dots ①$$

$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{0}$ は①を満たす. 以下, $\overrightarrow{p} \neq \overrightarrow{0}$ とする.

①は次のように読み替えることができる.

$$① \iff (\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{a})^2 + \{|\overrightarrow{p}|^2 - 2(\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{a})^2 + (\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{a})^2 |\overrightarrow{a}|^2\} \leq 1$$

$$\iff |\overrightarrow{p}|^2 + (\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{a})^2 \{|\overrightarrow{a}|^2 - 1\} \leq 1$$

$$\iff |\overrightarrow{p}|^2 \leq 1 \quad (\because |\overrightarrow{a}| = 1)$$

$$\iff |\overrightarrow{p}| \leq 1$$

したがって, $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{0}$ も含めて, ①を満たす点 P の集合は, 原点 O からの距離が 1 以下の点の集合である.

(1) 求める図形は, 原点 O を中心とし半径が 1 の円とその内部,
面積は π (答)

(2) 求める図形は, 原点 O を中心とし半径が 1 の球とその内部,
体積は $\frac{4}{3}\pi$ (答)

2.

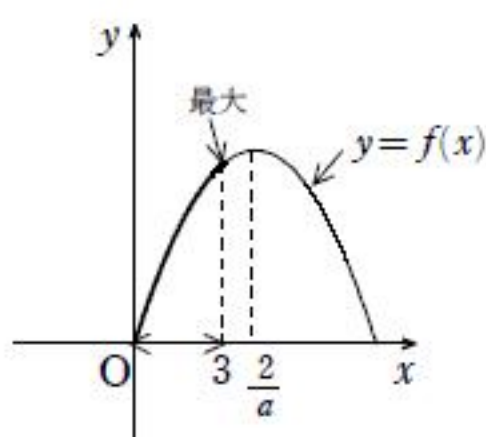
$$(1) \quad f(x) = -a^2x^2 + 4ax \quad (a > 0)$$

$$= -a^2 \left(x - \frac{2}{a} \right)^2 + 4$$

放物線 $y = f(x)$ の軸 $x = \frac{2}{a}$ の位置で場合分けをする.

$$(i) \quad 3 < \frac{2}{a} \text{ すなわち } 0 < a < \frac{2}{3} \text{ のとき}$$

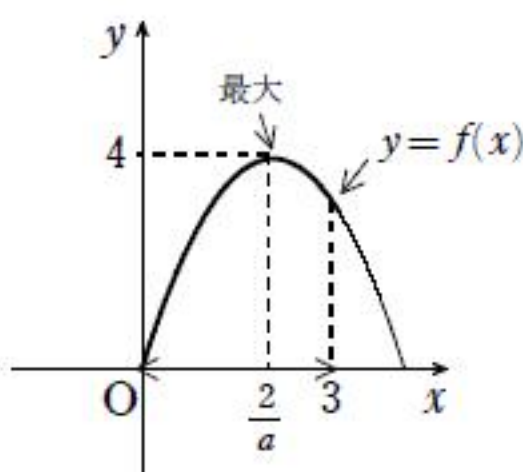
$$\text{最大値: } f(3) = -9a^2 + 12a$$



.....(答)

$$(ii) \quad \frac{2}{a} \leq 3 \text{ すなわち } \frac{2}{3} \leq a \text{ のとき}$$

$$\text{最大値: } f\left(\frac{2}{a}\right) = 4$$



.....(答)

$$(2) \quad f(x) = 3 \text{ を解くと}$$

$$f(x) = 3 \iff -a^2x^2 + 4ax = 3$$

$$\iff (ax-1)(ax-3) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{a}, \frac{3}{a}$$

したがって、曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = 3$ は $x = \frac{1}{a}, \frac{3}{a}$ で交わるから

曲線 $y = f(x)$ と線分 l (端点を含む) が共有点をもつ条件は

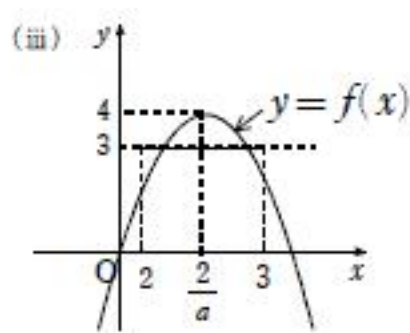
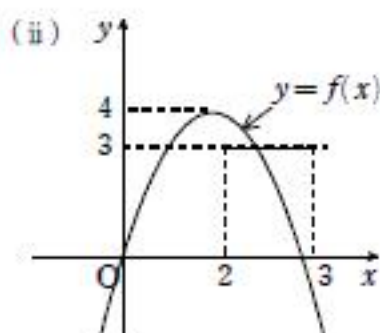
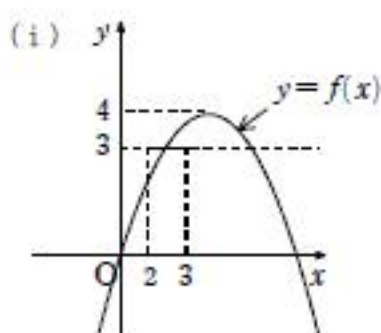
2つの解のうちの少なくとも1つが区間 $2 \leq x \leq 3$ に含まれていることである.

$$\left. \begin{aligned} & 2 \leq \frac{1}{a} \leq 3 \text{ または } 2 \leq \frac{3}{a} \leq 3 \\ \iff & \frac{1}{3} \leq a \leq \frac{1}{2} \text{ または } 1 \leq a \leq \frac{3}{2} \end{aligned} \right\} \text{(答)}$$

(別解)

曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = 3$ は必ず2つの共有点をもつ.

曲線 $y = f(x)$ と線分 l (端点を含む) が共有点をもつのは次の3つの場合がある.



$$\begin{cases} f(2) \leq 3 \\ f(3) \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(2) \geq 3 \\ f(3) \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(2) \leq 3, f(3) \leq 3 \\ 2 \leq \frac{2}{a} \leq 3 \end{cases}$$

$$f(2) - 3 = -4a^2 + 8a - 3 = -(2a-1)(2a-3)$$

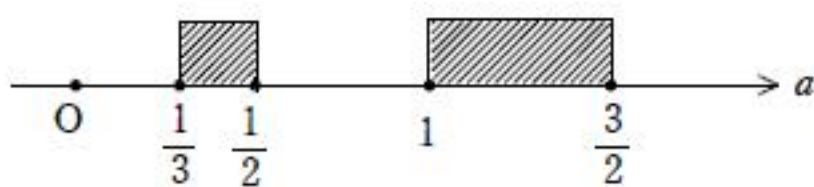
$$f(3) - 3 = -9a^2 + 12a - 3 = -3(3a-1)(a-1)$$

であるから,

$$\left\{ \begin{aligned} (i) & \iff \left(a \leq \frac{1}{2} \text{ または } \frac{3}{2} \leq a \right) \text{ かつ } \frac{1}{3} \leq a \leq 1 \iff \frac{1}{3} \leq a \leq \frac{1}{2} \\ (ii) & \iff \frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2} \text{ かつ } \left(a \leq \frac{1}{3} \text{ または } 1 \leq a \right) \iff 1 \leq a \leq \frac{3}{2} \\ (iii) & \iff \left(a \leq \frac{1}{2} \text{ または } \frac{3}{2} \leq a \right) \\ & \quad \text{かつ } \left(a \leq \frac{1}{3} \text{ または } 1 \leq a \right) \text{ かつ } \frac{2}{3} \leq a \leq 1 \\ & \quad \text{より (iii) を満たす } a \text{ は存在しない.} \end{aligned} \right.$$

したがって、求める条件は

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{3} \leq a \leq \frac{1}{2} \text{ または } 1 \leq a \leq \frac{3}{2} \\ & \text{.....(答)} \end{aligned} \right\}$$



3.

- (1) A, B の「手」に対する A の勝敗を, 勝ちを○, 負けを×, 引き分けを△として表にすると, 次のようになる. (以下, A の勝敗表とよぶ.)

$A \backslash B$	石	はさみ	紙
石	△	○	×
はさみ	×	△	○
紙	○	×	△

これら 9 通りは同様に確からしいから

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ が } B \text{ に勝つ確率} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \\ A \text{ が } B \text{ に引き分ける確率} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \dots(\text{答})$$

- (2) A の勝敗表は次のようになる.

$A \backslash B$	石	はさみ	紙	水
石	△	○	×	×
はさみ	×	△	○	×
紙	○	×	△	○
水	○	○	×	△

これら 16 通りは同様に確からしいから

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ が } B \text{ に勝つ確率} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \\ A \text{ が } B \text{ に引き分ける確率} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \dots(\text{答})$$

- (3) A の勝敗表を用いて考える.

$A \backslash B$	石	はさみ	紙	水	土
石	△	○	×	×	← a
はさみ	×	△	○	×	← b
紙	○	×	△	○	← c
水	○	○	×	△	← d
土					△

A の勝つ確率が A が選ぶ「手」によらないとは, 勝敗表上では, 各行における○の数が等しいことである.

紙, 水の行の○の数は 2 以上であるから, a を○にする必要がある. 同様に, b を○, すると c, d を×にする必要がある.

このとき, 土の行は左から×, ×, ○, ○, △で○の数が 2 個になり, 十分でもある.

したがって「土」は

$$\left. \begin{array}{l} \text{「紙」, 「水」 に勝ち} \\ \text{「石」, 「はさみ」 に負け} \end{array} \right\} \dots\dots(\text{答})$$

と定めればよい.