

1. a, b は実数, $a > b > 0$

$$f(x) = \log\{ax + b(1-x)\} - x\log a - (1-x)\log b \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$0 \leq x \leq 1$ に対して $b \leq ax + b(1-x) \leq a$ である.(*)

$$(1) \quad f'(x) = \frac{a-b}{ax+b(1-x)} - \log a + \log b$$

$$f''(x) = \frac{-(a-b)^2}{\{ax+b(1-x)\}^2}$$

$a-b > 0$ より $f''(x) < 0$ ($0 < x < 1$) である.

(2) 関数 $f(x)$ は $[0, 1]$ で連続, $(0, 1)$ で微分可能であり,
 $f(0) = f(1) = 0$ であるから, (ラグランジュの) 平均値の定理
 [またはロルの定理]により

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 0 = f'(c) \quad \text{かつ} \quad 0 < c < 1$$

を満たす実数 c が存在する.

(1) より $f'(x)$ は $0 < x < 1$ において, 狭義の単調減少である
 から, このような c はただ 1 つである.

(3) (2) の c を用いると

$$\begin{aligned} f'(x) - f'(c) &= \frac{a-b}{ax+b(1-x)} - \frac{a-b}{ac+b(1-c)} \\ &= (c-x)(a-b)^2 \cdot \frac{1}{ax+b(1-x)} \cdot \frac{1}{ac+b(1-c)} \end{aligned}$$

$(a-b)^2 > 0$, 分母は (*) より, それぞれ正であるから, $0 \leq x \leq 1$
 における増減, 凹凸は次のようになる.

x	0		c		1
$f'(x)$		+	0	-	
$f''(x)$	-				
$f(x)$	0	↗	極大	↘	0

$0 \leq x \leq 1$ において, $f(x) \geq 0$ すなわち

$$\begin{aligned} \log\{ax + b(1-x)\} &\geq x\log a + (1-x)\log b \\ &= \log a^x + \log b^{1-x} \\ &= \log(a^x b^{1-x}) \end{aligned}$$

関数 $y = e^x$ は連続な単調増加関数であるから

$$e^{\log\{ax+b(1-x)\}} \geq e^{\log(a^x b^{1-x})}$$

すなわち

$$ax + b(1-x) \geq a^x b^{1-x}$$

が成り立つ.

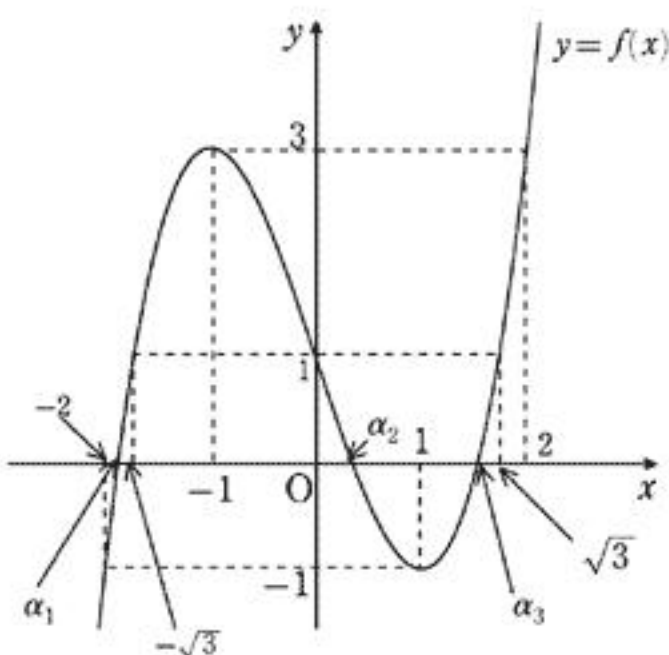
2.

- (1) $f(x)$ の増減, グラフを調べる.

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

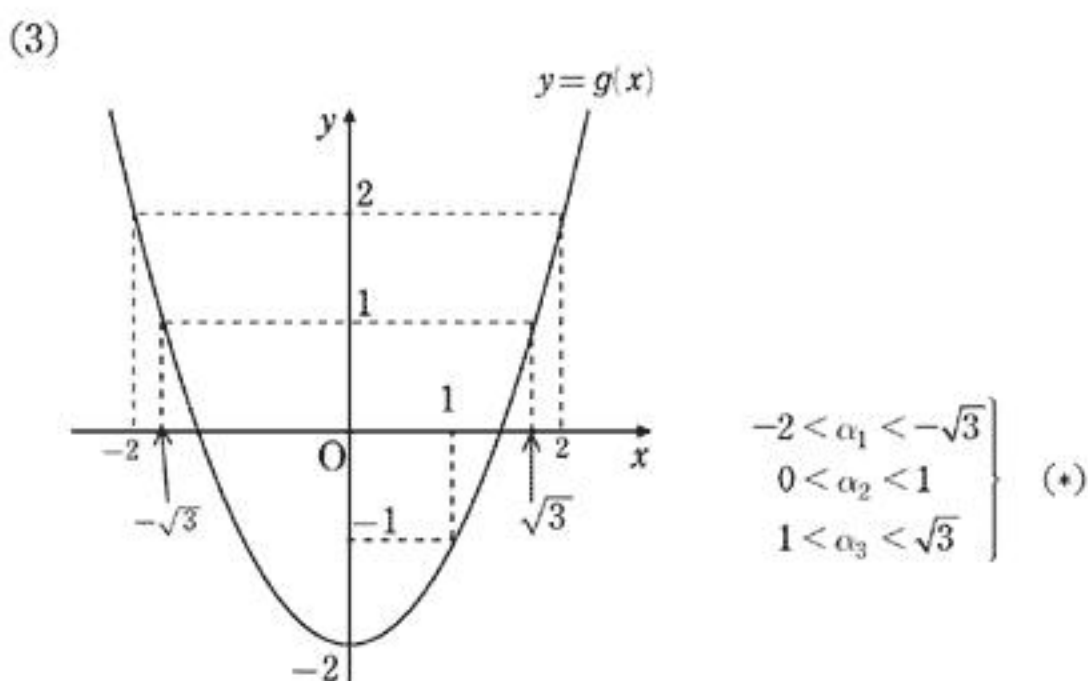
x		-1		1	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$



$-2 < x < -\sqrt{3}$ で単調増加, $f(-2) = -1 < 0, f(-\sqrt{3}) = 1 > 0$
 $0 < x < 1$ で単調減少, $f(0) = 1 > 0, f(1) = -1 < 0$
 $1 < x < \sqrt{3}$ で単調増加, $f(1) = -1 < 0, f(\sqrt{3}) = 1 > 0$
 より, これら各区間に 1 つずつ実数解をもつ. (証明終)

$$\begin{aligned}
 (2) \quad f(g(x)) &= \{g(x)\}^3 - 3g(x) + 1 \\
 &= (x^2 - 2)^3 - 3(x^2 - 2) + 1 \\
 &= x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 1 \\
 &= (x^3 - 3x)^2 - 1 \\
 &= (x^3 - 3x - 1)(x^3 - 3x + 1) \\
 &= (x^3 - 3x - 1)f(x)
 \end{aligned}$$

したがって, $f(\alpha) = 0$ ならば $f(g(\alpha)) = 0$ より $g(\alpha)$ も $f(x) = 0$ の解である.



$$-2 < \alpha_1 < -\sqrt{3} \quad \text{より} \quad 1 < g(\alpha_1) < 2$$

$$0 < \alpha_2 < 1 \quad \text{より} \quad -2 < g(\alpha_2) < -1$$

$$1 < \alpha_3 < \sqrt{3} \quad \text{より} \quad -1 < g(\alpha_3) < 1$$

$g(\alpha_1), g(\alpha_2), g(\alpha_3)$ も $f(x) = 0$ の解であることから, (*) と見くらべて,

$$g(\alpha_1) = \alpha_3, g(\alpha_2) = \alpha_1, g(\alpha_3) = \alpha_2 \quad \text{である.} \quad (\text{証明終})$$

(補足) $f(x) = 0$ を解く方法は, 2009 年筑波大学第 1 問を参照せよ.

第 5 問との関連としては, $x = s + \frac{1}{s}$ とおくと, s は

$s^6 + s^3 + 1 = 0$ の解となり, 原始 9 乗根 (9 乗してはじめて 1 になる複素数) となる.

$$z_n = \cos \frac{2n}{9} \pi + i \sin \frac{2n}{9} \pi \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 4)$$

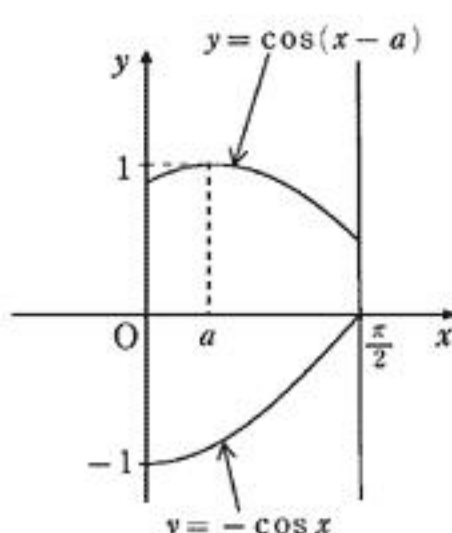
$\frac{1}{z_n} = \overline{z_n}$ であることから, $f(x) = 0$ の解が

$$x = 2 \cos \frac{2}{9} \pi, 2 \cos \frac{4}{9} \pi, 2 \cos \frac{8}{9} \pi$$

と求まる. (2)(3) は三角関数の 2 倍角の公式を利用して示せる.

3.

(1)



$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, $-a \leq x-a \leq \frac{\pi}{2}-a$

$-\frac{\pi}{2} < -a \leq 0, 0 < \frac{\pi}{2}-a \leq \frac{\pi}{2}$ より

$\cos(x-a) \geq 0$, また

$-\cos x \leq 0$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\cos(x-a) - (-\cos x)\} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\cos(x-a) + \cos x\} dx$$

$$= [\sin(x-a) + \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right) + \sin\frac{\pi}{2} \right\} - \{\sin(-a) + \sin 0\}$$

$$= \sin a + \cos a + 1$$

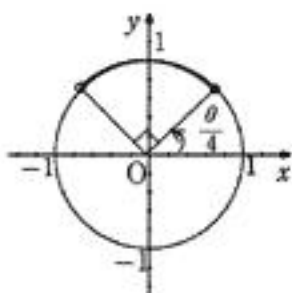
.....(答)

$$(2) \quad S = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) + 1$$

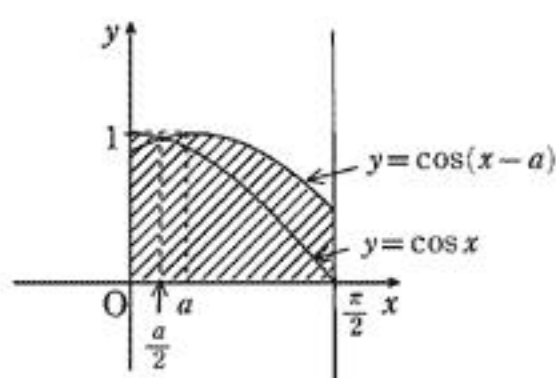
a が $0 \leq a < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, $\frac{\pi}{4} \leq a + \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi$ であるから

$$a + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \iff a = \frac{\pi}{4}$$

のとき, 最大値 $\sqrt{2} + 1$ をとる.



$$(3) \quad \cos x - \cos(x-a) = -2 \sin\left(x - \frac{a}{2}\right) \sin \frac{a}{2}, \sin \frac{a}{2} > 0 \text{ より}$$



$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \text{ のとき,} \\ \cos x \geq \cos(x-a) \\ \frac{a}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき,} \\ \cos x \leq \cos(x-a) \end{cases}$$

上の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積が V であるから,

$$V = \pi \int_0^{\frac{a}{2}} \cos^2 x dx + \pi \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x-a) dx$$

$$= \pi \left\{ \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx + \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2(x-a)}{2} dx \right\}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left\{ \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{a}{2}} + \left[x + \frac{1}{2} \sin 2(x-a) \right]_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right\}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left\{ \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{2} \sin a \right) + \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin(\pi - 2a) \right\} \right.$$

$$\left. - \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{2} \sin(-a) \right) \right\}$$

$$= \frac{\pi}{4} \{ (a + \sin a) + (\pi + \sin 2a) - (a - \sin a) \}$$

$$= \frac{\pi}{4} (\sin 2a + 2 \sin a + \pi) \quad \text{.....(答)}$$

4.

(1) X_3

$A \backslash B$	1	2	3	4	5	6
1	$a+b$	2	3	4	5	6
2	1	$2a+b$	3	4	5	6
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6

 X_4

$A \backslash B$	1	2	3	4	5	6
1	$a+b$	2	3	4	5	6
2	1	$2a+b$	3	4	5	6
3	1	2	$3a+b$	4	5	6
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6

(2) 36通りは同様に確からしい. $X_n = X_n(A, B)$ とおく. X_3 と X_4 の違いは $A=3$ の行のみである.

$$\begin{aligned}
 E_k &= \sum_{B=1}^6 \left\{ \sum_{A=1}^6 \frac{1}{6^2} X_n(A, B) \right\} \\
 E_4 - E_3 &= \frac{1}{6^2} \sum_{B=1}^6 \left\{ \sum_{A=1}^6 X_4(A, B) - \sum_{A=1}^6 X_3(A, B) \right\} \\
 &= \frac{1}{6^2} \sum_{B=1}^6 \{X_4(3, B) - X_3(3, B)\} \\
 &= \frac{1}{6^2} \left\{ \sum_{B=1}^6 X_4(3, B) - \sum_{B=1}^6 X_3(3, B) \right\} \\
 &= \frac{1}{6^2} \{(3a+b+18) - 18\} \\
 &= \frac{1}{36} (3a+b) \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

(3) $k=1, 2, 3, 4, 5$ とする. X_k と X_{k+1} の違いは, $A=k$ の行のみである. X_k

k	$\parallel$	k	$\cdots$	k	k	k	$\cdots$	k
-----	-------------	-----	----------	-----	-----	-----	----------	-----

 X_{k+1}

k	$\parallel$	1	$\cdots$	$k-1$	$ka+b$	$k+1$	$\cdots$	6
-----	-------------	---	----------	-------	--------	-------	----------	---

(2)と同様にして

$$\begin{aligned}
 E_{k+1} - E_k &= \frac{1}{6^2} \left\{ \sum_{B=1}^6 X_{k+1}(k, B) - \sum_{B=1}^6 X_k(k, B) \right\} \\
 &= \frac{1}{6^2} \{(21-k+ka+b) - 6k\} \\
 &= \frac{1}{6^2} \{(a-7)k + (b+21)\} \quad (=f(k) \text{とおく.}) \\
 E_1 = E_2 = \dots = E_6 &\iff E_{k+1} - E_k = 0 \quad (k=1, 2, 3, 4, 5) \\
 &\iff f(k) = 0 \quad (k=1, 2, 3, 4, 5)
 \end{aligned}$$

 $f(k)$ は k の1次式であり, 2個以上の異なる k に対して $f(k)=0$ が成り立つから, $f(k)=0$ は k の恒等式であり, $(a, b) = (7, -21)$ が存在する. $\dots\dots(\text{答})$

5. t は実数,

$$\{a_n\}: a_1 = 1, a_2 = 2t, a_{n+1} = 2ta_n - a_{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

(1) $0 < a_n < a_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$ を数学的帰納法で証明する.

(I) $n = 1$ のとき,

$$0 < 1 = a_1$$

$$a_1 - a_2 = 1 - 2t \leq -1 < 0$$

より成り立つ.

(II) $n = k - 1$ のとき成り立つと仮定すると, $0 < a_{k-1} < a_k$

$$a_k - a_{k+1} = a_k - (2ta_k - a_{k-1})$$

$$= (a_{k-1} - a_k) + 2(1-t)a_k$$

帰納法の仮定より $a_{k-1} - a_k < 0$, また

$$a_k > 0, 1 - t \leq 0$$

より $2(1-t)a_k \leq 0$ から, $a_k - a_{k+1} < 0$ である.

よって, $n = k$ のときも成り立つ.

(I)(II) より $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$0 < a_n < a_{n+1}$$

が成り立つ.

(証明終)

(2) $t' = -t$ とし, 数列 $\{b_n\}$ を

$$(-1)^{n-1}b_n = a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定義する.

$$b_1 = 1, b_2 = -a_2 = 2t'$$

$$(-1)^n b_{n+1} = 2t' \cdot (-1)^{n-1} b_n - (-1)^{n-2} b_{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

すなわち

$$b_{n+1} = -2tb_n - b_{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

$$b_{n+1} = 2t'b_n - b_{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

$t \leq -1$ のとき, $t' \geq 1$ であるから, (1) の結果より

$$0 < b_n < b_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$0 < |b_n| < |b_{n+1}| \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$|b_n| = |(-1)^{n-1}a_n| = |a_n|$ であるから

$$0 < |a_n| < |a_{n+1}| \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である.

(証明終)

(3) 数学的帰納法で証明する.

$$(I) \quad n = 1 \text{ のとき, } a_1 = \frac{\sin \theta}{\sin \theta} = 1$$

$$n = 2 \text{ のとき, } a_2 = \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} = 2 \cos \theta = 2t \quad \text{より成り立つ.}$$

(II) $n = k - 1, k$ のとき成り立つと仮定する.

$$a_k = \frac{\sin k\theta}{\sin \theta}, a_{k-1} = \frac{\sin(k-1)\theta}{\sin \theta}$$

このとき,

$$a_{k+1} = 2ta_k - a_{k-1}$$

$$= 2 \cos \theta \cdot \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} - \frac{\sin(k-1)\theta}{\sin \theta} \quad (\text{仮定より})$$

$$= \frac{1}{\sin \theta} \{ \sin(k+1)\theta + \sin(k-1)\theta \} - \frac{\sin(k-1)\theta}{\sin \theta}$$

(積から和への公式利用)

$$= \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin \theta}$$

よって, $n = k + 1$ のときも成り立つ.

(I)(II) より $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して,

$$a_n = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}$$

が成り立つ.

(証明終)

(補足)

$|t| \geq 1$ に対して, $t = \frac{1}{2} \left(s + \frac{1}{s} \right)$ とおいて漸化式を解くと次のようになる.

$$t = 1 \text{ のとき, } a_n = n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$t = -1 \text{ のとき, } a_n = (-1)^{n-1} n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$|t| > 1 \text{ のとき, } a_n = \frac{s^n - \frac{1}{s^n}}{s - \frac{1}{s}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$a_{n+1} - a_n$ を計算することにより, (1)(2) を示すことができる.