

(平 21 前)

数 学

(理 科 系)

(1 ～ 5 ページ)

- ・ ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点

1. a, b は実数で $a > b > 0$ とする. 区間 $0 \leq x \leq 1$ で定義される関数 $f(x)$ を次のように定める.

$$f(x) = \log(ax + b(1-x)) - x \log a - (1-x) \log b$$

ただし, $\log$ は自然対数を表す. このとき, 以下のことを示せ. (配点 30 点)

- (1) $0 < x < 1$ に対して $f''(x) < 0$ が成り立つ.
- (2) $f'(c) = 0$ をみたす実数 c が, $0 < c < 1$ の範囲にただ 1 つ存在する.
- (3) $0 \leq x \leq 1$ をみたす実数 x に対して,

$$ax + b(1-x) \geq a^x b^{1-x}$$

が成り立つ.

2. $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $g(x) = x^2 - 2$ とし, 方程式 $f(x) = 0$ について考える. このとき, 以下のことを示せ. (配点 30 点)

(1) $f(x) = 0$ は絶対値が 2 より小さい 3 つの相異なる実数解をもつ.

(2) α が $f(x) = 0$ の解ならば, $g(\alpha)$ も $f(x) = 0$ の解となる.

(3) $f(x) = 0$ の解を小さい順に $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とすれば,

$$g(\alpha_1) = \alpha_3, \quad g(\alpha_2) = \alpha_1, \quad g(\alpha_3) = \alpha_2$$

となる.

3. a を $0 \leq a < \frac{\pi}{2}$ の範囲にある実数とする. 2つの直線 $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ および 2つの曲線 $y = \cos(x - a)$, $y = -\cos x$ によって囲まれる図形を G とする. このとき, 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) 図形 G の面積を S とする. S を a を用いた式で表せ.
- (2) a が $0 \leq a < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, S を最大にするような a の値と, そのときの S の値を求めよ.
- (3) 図形 G を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V とする. V を a を用いた式で表せ.

4. 大小2つのサイコロを同時に1回投げて、大きいサイコロの出た目の数 A , および小さいサイコロの出た目の数 B に応じて得点を競うゲームを考える. ただし, このゲームには6種類の得点 X_n ($1 \leq n \leq 6$) があって, それぞれ, 次の規則で定められているとする:

$$X_n = \begin{cases} A & (A \geq n \text{ のとき}) \\ B & (A < n \text{ かつ } A \neq B \text{ のとき}) \\ aA + b & (A < n \text{ かつ } A = B \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここで, a, b は実数の定数である. また, 得点 X_n の期待値を E_n とする. このとき, 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) A, B のとり得る値に対する得点 X_3 および X_4 の値を, 答案用紙の表にそれぞれ記入せよ.
- (2) $E_4 - E_3$ を求めよ.
- (3) $E_1 = E_2 = \cdots = E_6$ となるような a, b はあるか. あれば求めよ. なければ, そのことを示せ.

5. t を実数として, 数列 $a_1, a_2, \dots$ を

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, & a_2 &= 2t, \\ a_{n+1} &= 2ta_n - a_{n-1} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

で定める. このとき, 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) $t \geq 1$ ならば, $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ となることを示せ.
- (2) $t \leq -1$ ならば, $0 < |a_1| < |a_2| < |a_3| < \dots$ となることを示せ.
- (3) $-1 < t < 1$ ならば, $t = \cos \theta$ となる θ を用いて,

$$a_n = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \quad (n \geq 1)$$

となることを示せ.