

(1) $f(x) = a(x-b)^2$ と $y = -4x + 4$ を連立して,

$$a(x-b)^2 = -4x + 4$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + 2(2-ab)x + ab^2 - 4 = 0 \quad \dots\dots ①$$

①が重解をもてばよいので

$$\begin{aligned} D/4 &= (2-ab)^2 - a(ab^2 - 4) \\ &= 4 - 4ab + a^2b^2 - a^2b^2 + 4a = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 4ab = 4a + 4 \quad a \neq 0 \text{ より} \quad \therefore \text{(答)} \quad \underline{b = \frac{a+1}{a}}$$

(2) (1)より, $f(x) = a\left(x - \frac{a+1}{a}\right)^2$ (ただし, $a > 0, 0 \leq x \leq 2$)

$$\boxed{\text{最大値}} \quad (\text{軸}) \quad x = \frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a} > 1 \text{ より}$$

$$\underline{\text{最大値 } M(a)} = f(0) = a \cdot \frac{(a+1)^2}{a^2} = \frac{(a+1)^2}{a}$$

$$\boxed{\text{最小値}} \quad (\text{i}) \quad 1 < \frac{a+1}{a} \leq 2 \quad (1 \leq a \text{ のとき})$$

$$\underline{\text{最小値 } m(a)} = f\left(\frac{a+1}{a}\right) = 0$$

$$(\text{ii}) \quad 2 < \frac{a+1}{a} \quad (0 < a < 1 \text{ のとき})$$

$$\underline{\text{最小値 } m(a)} = f(2) = a\left(2 - \frac{a+1}{a}\right)^2 = \frac{(a-1)^2}{a}$$

$$\text{以上まとめて, } M(a) = \frac{(a+1)^2}{a} \quad (a > 0), \quad m(a) = \begin{cases} 0 & (1 \leq a \text{ のとき}) \\ \frac{(a-1)^2}{a} & (0 < a < 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(3) 相加・相乗平均より

$$M(a) = \frac{a^2 + 2a + 1}{a} = a + \frac{1}{a} + 2 \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} + 2 = 4$$

等号成立は $a = \frac{1}{a}$ のとき, すなわち $a = 1$ のとき成立

以上より $(M(a) \text{ の最小値}) = 4 \quad (a = 1 \text{ のとき})$ (答)

(1) 底面の三角形 ABC は

$$AB = AC = \sqrt{13}, BC = 4 \text{ の}$$

二等辺三角形である.

図形の対称性と点 H が平面 ABC 上にあることから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= (1-2t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} \\ &= (1-2t)\vec{a} + t\vec{b} + t\vec{c}\end{aligned}$$

と表せる. ($\overrightarrow{OH} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$ の実数 t と同一)

ここで, $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AC}$ だから,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 6, \vec{b} \cdot \vec{c} = 8 \text{ に注意して,}$$

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = \{(1-2t)\vec{a} + t\vec{b} + t\vec{c}\} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

$$= 6(1-2t) + 16t + 8t - 9(1-2t) - 6t - 6t = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{6}$$

(このとき $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ もみたす) $\therefore$ (答) $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{6}(4\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ より

$$\underline{r = \frac{2}{3}, s = \frac{1}{6}, t = \frac{1}{6}}$$

(2) $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{CH}$ より,

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + k\overrightarrow{CH}$$

$$= \vec{c} + k\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} - \frac{5}{6}\vec{c}\right)$$

$$= \frac{2k}{3}\vec{a} + \frac{k}{6}\vec{b} + \left(1 - \frac{5k}{6}\right)\vec{c} \quad (k: \text{実数}) \text{ と表せる.}$$

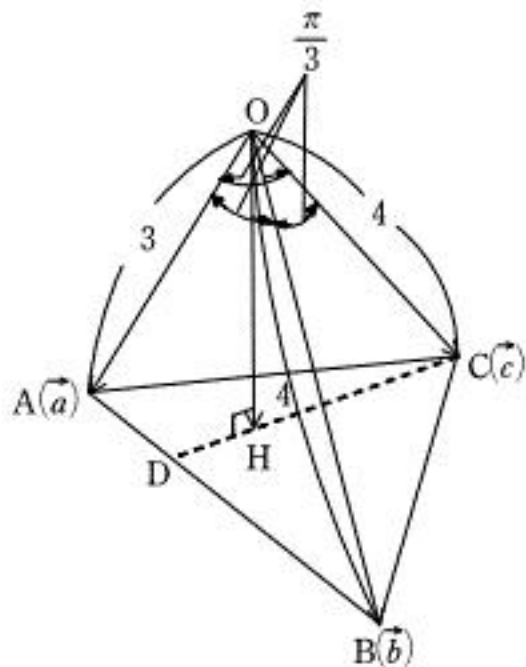
点 D は直線 AB 上より $1 - \frac{5k}{6} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{6}{5} \quad \therefore \underline{CH : HD = 5 : 1}$ (答)

これより,

$$\overrightarrow{OD} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}$$

$$= \frac{4\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{1+4}$$

とみなせるから, $\therefore \underline{AD : DB = 1 : 4}$ (答)



- (1) 対偶をとり, a と b はともに 3 の倍数でないとする.

$$\text{つまり, } a = 3k \pm 1, b = 3l \pm 1$$

(複号任意, $k \geq 0$ または $k \geq 1, l \geq 0$ または $l \geq 1$ の k, l は整数)

$$ab = (3k \pm 1)(3l \pm 1) = 3M \pm 1 \quad (M \geq 0 \text{ または } M \geq 1 \text{ の } M \text{ は整数})$$

つまり, ab は 3 の倍数でない. よって, 対偶は真より, 題意は真と示された.

(別解) 2 つの自然数 a, b において, 3 の倍数か 3 の倍数でないかに分類して調べる.

$$(i) \quad a = 3k, b = 3l \text{ のとき} \quad a \times b = 3k \times 3l = 9kl \dots\dots \boxed{3 \text{ の倍数}}$$

$$(k, l \geq 1)$$

$$(ii) \quad a = 3k, b = 3l \pm 1 \text{ のとき} \quad a \times b = 3k \times (3l \pm 1) \dots\dots \boxed{3 \text{ の倍数}}$$

$$(k \geq 1, l \geq 0 \text{ または } l \geq 1)$$

$$(iii) \quad a = 3k \pm 1, b = 3l \pm 1 \text{ のとき} \quad a \times b = (3k \pm 1) \times (3l \pm 1) \text{ (複号任意)}$$

$$(k \geq 0 \text{ または } k \geq 1, l \geq 0 \text{ または } l \geq 1) \quad = 3M \pm 1 \text{ (} M \geq 0 \text{ または } M \geq 1 \text{ の整数)}$$

$$\dots\dots \boxed{3 \text{ の倍数でない}}$$

以上 (i) ~ (iii) より題意は示された

$$(2) \quad \begin{cases} a + b = 3k' & \dots\dots \textcircled{1} \\ ab = 3l' & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases} \quad (k', l' \text{ は自然数}) \quad \text{のとき,}$$

②と(1)の結果より, $a = 3a'$ または $b = 3b'$ (a', b' は自然数) とわかる.

ここで, $a = 3a'$ とする. ①より $b = 3k' - 3a' = 3(k' - a')$ より

b も 3 の倍数となる. $b = 3b'$ のときも同様に, a も 3 の倍数である.

以上より, $a + b, ab$ がともに 3 の倍数のとき, a と b はともに 3 の倍数となる.

$$(3) \quad \begin{cases} a + b = 3k'' & \dots\dots \textcircled{3} \\ a^2 + b^2 = 3l'' & \dots\dots \textcircled{4} \end{cases} \quad (k'', l'' \text{ は自然数}) \quad \text{のとき,}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \Leftrightarrow 9k''^2 = 3l'' + 2ab \Leftrightarrow ab = \frac{9k''^2 - 3l''}{2} = 3 \times \frac{3k''^2 - l''}{2}$$

ab は自然数なので③, ④より k''', l''' を自然数とすると

$$\begin{cases} a + b = 3k''' \\ ab = 3l''' \end{cases} \quad \text{となり, さらに (2) より, } \underline{a \text{ と } b \text{ はともに 3 の倍数となる}}$$