

$f'(x) = a - \sin x + \cos 2x$ が符号変化しなければよいので、

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{または} \quad f'(x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow a - \sin x + \cos 2x \geq 0 \quad \text{または} \quad a - \sin x + \cos 2x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow a \geq \sin x - \cos 2x \quad \text{または} \quad \sin x - \cos 2x \geq a$$

ここで、2 関数 $\begin{cases} y = a \\ g(x) = \sin x - \cos 2x \quad (0 \leq x \leq 2\pi \text{ で調べればよい}) \end{cases}$

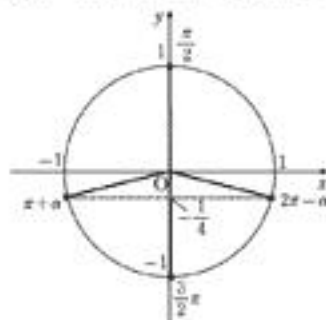
に分離し、その大小より $f'(x)$ が符号変化しないように a の範囲を求める。

$$g'(x) = \cos x + 2 \sin 2x$$

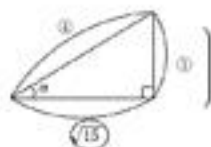
$$= \cos x + 4 \sin x \cos x$$

$$= 4 \cos x \left(\sin x + \frac{1}{4} \right)$$

$$\sin(\pi + \alpha) = \sin(2\pi - \alpha) = -\frac{1}{4}$$



つまり、 $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ となる実数 $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$ とおくと



増減表は次の通り。

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\pi + \alpha$		$\frac{3}{2}\pi$		$2\pi - \alpha$		2π
$g'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$	-1	↗	2	↘	$-\frac{9}{8}$	↗	0	↘	$-\frac{9}{8}$	↗	-1

$$g(\pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) - \cos(2\pi + 2\alpha) = -\sin \alpha - \cos 2\alpha$$

$$= -\frac{1}{4} - \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{16} \right) = -\frac{9}{8}$$

$$g(2\pi - \alpha) = \sin(2\pi - \alpha) - \cos(4\pi - 2\alpha) = -\sin \alpha - \cos 2\alpha$$

$$= -\frac{9}{8}$$

これより、求める a の値の範囲は $a \leq -\frac{9}{8}, 2 \leq a$ (答)

$$(1) \begin{cases} a+b=pk & \cdots\cdots ① \\ ab=pl & \cdots\cdots ② \end{cases} \quad (k, l \text{ は自然数}) \quad \text{とおける.}$$

p は素数より ②から a, b のうち少なくとも一方は p の倍数といえる.

ここで, $a=pa'$ (a' は自然数) とおく. このとき①より

$$b=pk-pa'=p(k-a')=pb' \quad (b' \text{ は } b'=k-a' \text{ をみたす自然数})$$

これより,

$a+b, ab$ がともに p の倍数のとき, a と b はともに p の倍数であることが示された.

$$(2) \begin{cases} a+b=pk' & \cdots\cdots ③ \\ a^2+b^2=pl' & \cdots\cdots ④ \end{cases} \quad (k', l' \text{ は自然数}) \quad \text{とおける.}$$

ここで, $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ より

$$\begin{aligned} ab &= \frac{(pk')^2 - pl'}{2} \quad (\because ③, ④) \\ &= p \times \frac{pk'^2 - l'}{2} \\ &= p \times l'' \quad \left(l'' \text{ は } l'' = \frac{pk'^2 - l'}{2} \text{ をみたす自然数} \right) \end{aligned}$$

$$\text{これより, } \begin{cases} a+b=pk' \\ a^2+b^2=pl' \end{cases} \quad \text{ならば } ab=pl'' \quad \text{つまり } \begin{cases} a+b=pk' \\ ab=pl'' \end{cases}$$

となり, (1) より a と b はともに p の倍数であることが示された.

$$(3) \begin{cases} a^2+b^2=pk'' & \cdots\cdots ⑤ \\ a^3+b^3=pl''' & \cdots\cdots ⑥ \end{cases} \quad (k'', l''' \text{ は自然数}) \quad \text{とおける.}$$

$$⑤ \text{ より } (a+b)(a^2-ab+b^2)=pk'''$$

p は素数より $a+b, a^2-ab+b^2$ の少なくとも一方は p の倍数

$$(i) \quad a+b \text{ が } p \text{ の倍数のとき, すなわち } a+b=pm \quad (m \text{ は自然数}) \cdots\cdots ⑦$$

⑤, ⑦より(2)に帰着し, a と b はともに p の倍数とわかる.

$$(ii) \quad a^2-ab+b^2 \text{ が } p \text{ の倍数のとき, すなわち}$$

$$a^2-ab+b^2=pm' \quad (m' \text{ は自然数}) \cdots\cdots ⑧$$

⑤, ⑧より

$$\begin{aligned} pk''-ab &= pm' \iff ab = p(k''-m') \\ &= p \times m'' \quad (m'' \text{ は } m'' = k''-m' \text{ をみたす自然数}) \end{aligned}$$

$$⑤ \text{ より, } (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$\begin{aligned} \iff (a+b)^2 &= pk'' + 2pm'' \\ &= p(k'' + 2m'') \end{aligned}$$

$$\therefore a+b = \sqrt{p(k''+2m'')} = p \times M \quad (M \text{ は自然数})$$

すなわち, $a+b, ab$ も p の倍数となり(1)に帰着し, a と b はともに p の倍数とわかる.

以上 (i), (ii) より,

a^2+b^2, a^3+b^3 がともに p の倍数のとき, a と b はともに p の倍数であることが示された.

- (1)
- $x > 0$
- で
- $y = f(x)$
- と
- $y = g(x)$
- を等値する.

$$f(x) = g(x) \iff \frac{\log x}{x} = \frac{2\log x}{x^2} \iff x \log x = 2 \log x$$

$$\iff (x-2)\log x = 0 \therefore x = 1, 2 \quad \therefore \text{交点座標 } (1, 0), \left(2, \frac{1}{2}\log 2\right)$$

$$\begin{aligned} (2) \quad f'(x) &= \frac{1 \cdot x - \log x \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{1 - \log x}{x^2} \\ g'(x) &= \frac{2\left(\frac{1}{x} \cdot x^2 - \log x \cdot 2x\right)}{x^4} \\ &= \frac{2(1 - 2\log x)}{x^3} \end{aligned}$$

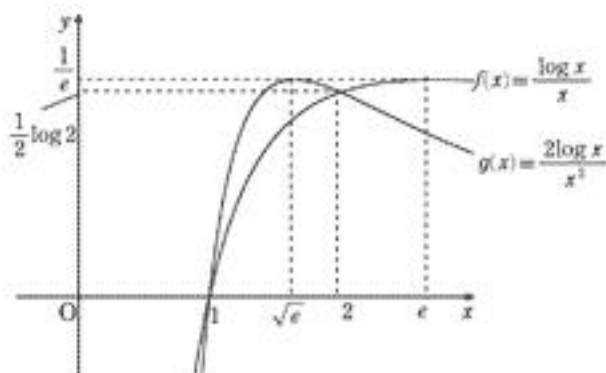
x	$(0) \cdots \cdots e \cdots \cdots (+\infty)$
$f'(x)$	$+ \quad 0 \quad -$
$f(x)$	$(-\infty) \nearrow \begin{matrix} \text{(極大)} \\ \frac{1}{e} \end{matrix} \searrow (0)$

x	$(0) \cdots \cdots e \cdots \cdots (+\infty)$
$g'(x)$	$+ \quad 0 \quad -$
$g(x)$	$(-\infty) \nearrow \begin{matrix} \text{(極大)} \\ \frac{1}{e} \end{matrix} \searrow (0)$

$$(\text{極大値}) \cdots \cdots f(e) = \frac{1}{e}, g(\sqrt{e}) = \frac{1}{e}, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} g(x) = -\infty, \quad (1) \text{ より } y = f(x) \text{ と } y = g(x) \text{ の } 2 \text{ 交点の}$$

$$\text{座標 } (1, 0), \left(2, \frac{1}{2}\log 2\right) \text{ に注意してグラフを描くと下図の通り.}$$



- (3) 求める面積を
- S
- とする.

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \left(\frac{2\log x}{x^2} - \frac{\log x}{x} \right) dx \\ &\quad + \int_2^e \left(\frac{\log x}{x} - \frac{2\log x}{x^2} \right) dx \end{aligned}$$

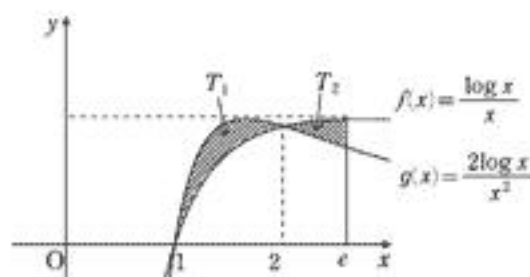
と表せる.

ここで

$$\begin{cases} \int \frac{\log x}{x} dx = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C \\ \int \frac{2\log x}{x^2} dx = \int 2\left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \log x dx = -\frac{2}{x} \log x + \int \frac{2}{x^2} dx \\ \quad = -\frac{2}{x} \log x - \frac{2}{x} + C' \quad (\text{ただし, } C \text{ と } C' \text{ は積分定数}) \end{cases}$$

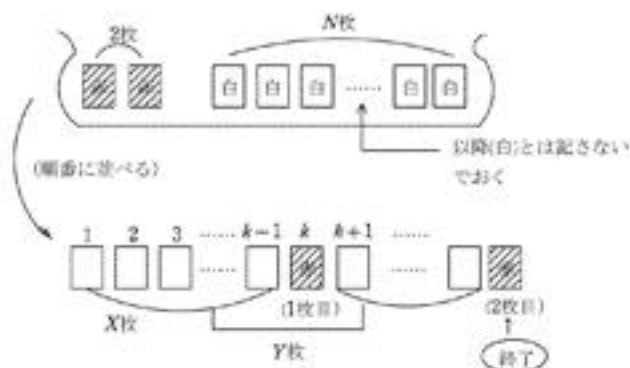
だから,

$$\begin{aligned} S &= \left[-\frac{2}{x} \log x - \frac{2}{x} \right]_1^2 - \left[\frac{1}{2}(\log x)^2 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2}(\log x)^2 \right]_2^e - \left[-\frac{2}{x} \log x - \frac{2}{x} \right]_2^e \\ &= -\log 2 - 1 + 2 - \frac{1}{2}(\log 2)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\log 2)^2 + \frac{2}{e} + \frac{2}{e} - \log 2 - 1 \\ &= \frac{4}{e} + \frac{1}{2} - (\log 2)^2 - 2\log 2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



《注釈》 問題の解釈を $y = f(x)$ と $y = g(x)$ と $x = e$ の 3 つで囲まれると判断した場合には (T_2) のみとなり, そのとき

$$\begin{aligned} T_2 &= \int_2^e \left(\frac{\log x}{x} - \frac{2\log x}{x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\log 2)^2 + \frac{2}{e} + \frac{2}{e} - \log 2 - 1 \\ &= \frac{4}{e} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\log 2)^2 - 2\log 2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



- (1) 赤が 2 枚と白 N 枚の $(N+2)$ 枚のカードを横一列に並べる並べ方は、

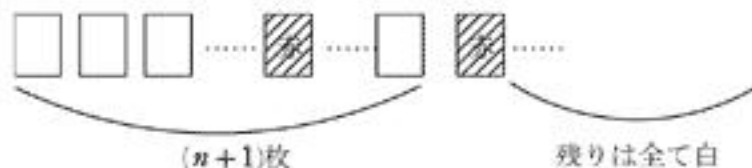
$$\frac{(N+2)!}{N!2!} = \frac{1}{2}(N+2)(N+1) \text{ 通り}$$

$$\therefore (\text{答}) p_n = \frac{{}^{N-n+1}C_1}{\frac{1}{2}(N+2)(N+1)} = \frac{2(N-n+1)}{(N+2)(N+1)} \quad (0 \leq n \leq N)$$

- (2) X の期待値を $E(X)$ とおく、

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^N k \cdot p_k \\ &= \sum_{k=0}^N k \cdot \frac{2(N-k+1)}{(N+2)(N+1)} \\ &= \frac{2}{(N+2)(N+1)} \sum_{k=0}^N \{(N+1)k - k^2\} \\ &= \frac{2}{(N+2)(N+1)} \left\{ (N+1) \cdot \frac{N}{2}(N+1) - \frac{N}{6}(N+1)(2N+1) \right\} \\ &= \frac{N}{3} \end{aligned} \quad \therefore (\text{答}) E(X) = \frac{N}{3}$$

- (3) $Y = n$ が成り立つとき、並べ方は以下の通りである、



$$\therefore (\text{答}) q_n = \frac{{}^{n+1}C_1}{\frac{1}{2}(N+2)(N+1)} = \frac{2(n+1)}{(N+2)(N+1)} \quad (0 \leq n \leq N)$$

(1) 回転行列 $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ に対して,

$$\{R(\theta)\}^n = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \text{ に注意して,}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} R(\theta) \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{より,}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= \left\{ \frac{1}{2} R(\theta) \right\}^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \begin{pmatrix} \cos(n-1)\theta & -\sin(n-1)\theta \\ \sin(n-1)\theta & \cos(n-1)\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore (\text{答}) \quad \begin{cases} a_n = \frac{\cos(n-1)\theta}{2^{n-1}} \\ b_n = \frac{\sin(n-1)\theta}{2^{n-1}} \end{cases} \quad (n \geq 1)$$

$$(2) \quad \theta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき, 点 } P_n \left(\frac{\cos \frac{n-1}{3}\pi}{2^{n-1}}, \frac{\sin \frac{n-1}{3}\pi}{2^{n-1}} \right), \text{ 点 } P_{n+1} \left(\frac{\cos \frac{n}{3}\pi}{2^n}, \frac{\sin \frac{n}{3}\pi}{2^n} \right)$$

$\overline{P_n P_{n+1}} = l_n$ に対して,

$$\begin{aligned} l_n^2 &= \left(\frac{\cos \frac{n}{3}\pi - 2 \cos \frac{n-1}{3}\pi}{2^n} \right)^2 + \left(\frac{\sin \frac{n}{3}\pi - 2 \sin \frac{n-1}{3}\pi}{2^n} \right)^2 \\ &= \frac{1 + 4 - 4 \left(\cos \frac{n}{3}\pi \cdot \cos \frac{n-1}{3}\pi + \sin \frac{n}{3}\pi \cdot \sin \frac{n-1}{3}\pi \right)}{2^{2n}} \\ &= \frac{5 - 4 \cos \frac{\pi}{3}}{2^{2n}} \\ &= \frac{3}{2^{2n}} \qquad \therefore l_n = \frac{\sqrt{3}}{2^n} \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} l_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \text{ より, 初項 } \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 公比 } \frac{1}{2} \text{ の無限等比級数}$$

だから, $0 < \frac{1}{2} < 1$ に注意して,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} l_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned} \qquad (\text{答}) \quad \underline{\underline{\sqrt{3}}}$$