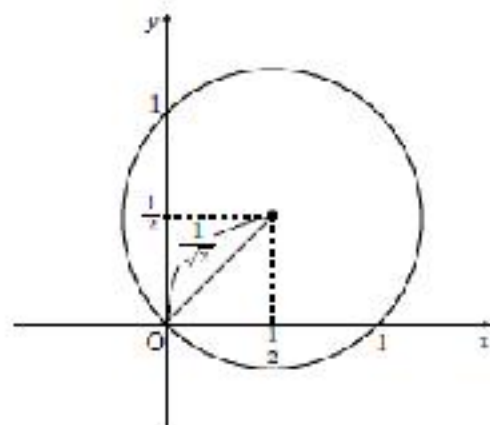


$$(1) \quad x^2 + y^2 = x + y$$

$$\iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

中心 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円を描く.

(図示すると右図の通り)



$$(2) \quad x + y = t \iff x + y - t = 0$$

これが(1)で表した円と共有点をもつときの t の範囲を求める.

$$\frac{\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - t\right|}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\iff |1 - t| \leq 1$$

$$\iff -1 \leq 1 - t \leq 1 \quad \therefore 0 \leq t \leq 2 \quad (\text{答})$$

$$(3) \quad F = (x + y)^3 - 3xy(x + y) - xy(x + y)$$

$$= (x + y)^3 - 4xy(x + y)$$

$$= t^3 - 4 \cdot \frac{t^2 - t}{2} \cdot t$$

$$= -t^3 + 2t^2 \quad (0 \leq t \leq 2)$$

$$F' = -3t^2 + 4t$$

$$= -3t \left(t - \frac{4}{3} \right)$$

増減表を描くと次の通り.

t	0	...	$\frac{4}{3}$	...	2
F'		+	0	-	
F	0	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0

$$\therefore \begin{cases} (F \text{ の最大値}) = \frac{32}{27} & \left(t = \frac{4}{3} \text{ のとき} \right) \\ (F \text{ の最小値}) = 0 & (t = 0, 2 \text{ のとき}) \end{cases} \quad \dots\dots(\text{答})$$

2.

(1) $C(a, 2a)$ より,

$$OC = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5}|a|$$

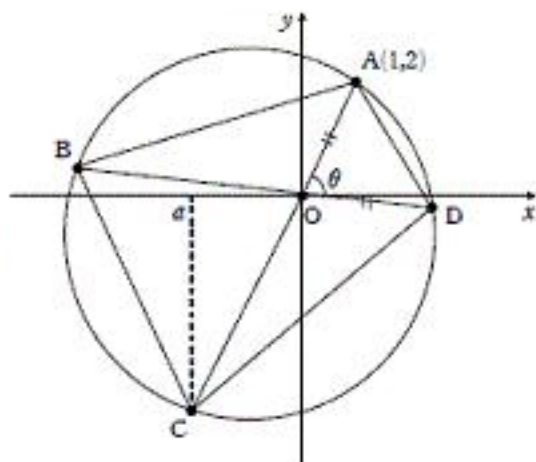
ここで, $a < 0$ と考えてよいから, $OC = -\sqrt{5}a$ (答)

方べきの定理より,

$$OA \times OC = OB \times OD \quad (\text{ただし, } OA = OD)$$

$$\iff OC = OB$$

$\therefore OB = OC$ は示された. (証明終)



(2) (1) より, 整理して,
$$\begin{cases} OA = OD = \sqrt{5} \\ OB = OC = -\sqrt{5}a \end{cases}$$

$$S = \triangle ODA + \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCD$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot (-5a) \cdot \sin(\pi - \theta) \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 5a^2 \cdot \sin \theta$$

$$= \underline{\underline{\frac{5}{2}(a^2 - 2a + 1) \sin \theta}} \quad \text{.....(答)}$$

(3) $\theta = \frac{\pi}{6}$, さらに $20 \leq S \leq 40$ より,

$$20 \leq \frac{5}{2}(a-1)^2 \cdot \frac{1}{2} \leq 40$$

$$\iff 16 \leq (1-a)^2 \leq 32$$

$$\therefore 4 \leq 1-a \leq 4\sqrt{2}$$

$$\therefore \underline{\underline{1-4\sqrt{2} \leq a \leq -3}}$$

これより, $(a \text{ の最大値}) = -3$ (答)

3.

- (1) (1枚目, 2枚目) と考える. カード番号は, 0 or 1 or 2 or 3 or 4 なので
マジックナンバー③ のとき, (1, 2), (2, 1) 2通り
マジックナンバー⑥ のとき, (2, 4), (4, 2) 2通り

$$P(2 \text{ 枚で負け}) = \frac{2+2}{5 \times 4} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \quad \text{.....(答)}$$

- (2) ・マジックナンバー③ のとき, (0, 1, 2) を並べ替えて,
(ただし, 1枚目と3枚目の0はなし) 2通り
・マジックナンバー⑥ のとき, (0, 2, 4) を並べ替えて,
(ただし, 1枚目と3枚目の0はなし) 2通り
(1, 2, 3) を並べ替えて,
(ただし, 1枚目と3枚目の3はなし) 2通り
・マジックナンバー⑨ のとき, (2, 3, 4) を並べ替えて,
(ただし, 1枚目と3枚目の3はなし) 2通り

$$P(3 \text{ 枚で負け}) = \frac{2+2+2+2}{5 \times 4 \times 3} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15} \quad \text{.....(答)}$$

(3) $P(1 \text{ 枚で負け}) = \frac{2}{5}$

次に4枚のカードを取り出したところで負けとなる確率を考える.

- ・マジックナンバー⑥ のとき, (0, 1, 2, 3) を並べ替えて,
(ただし, 1枚目と4枚目の0と3はなし) 4通り
・マジックナンバー⑨ のとき, (0, 2, 3, 4) を並べ替えて,
(ただし, 1枚目と4枚目の0と3はなし) 4通り

$$P(4 \text{ 枚で負け}) = \frac{4+4}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15} \quad \text{.....(答)}$$

5枚のカードを切り出したところでの負けはないので, 求める勝つ確率 P は

$$\begin{aligned} \therefore P &= 1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} \right) \\ &= 1 - \frac{12}{15} = \frac{1}{5} \quad \text{.....(答)} \end{aligned}$$