1.

(1)
$$
\begin{aligned}
&(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)\\
&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\\
&=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta) \qquad \text{(証明終)}
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
&z\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left\{\cos\frac{2\pi(k+1)}{n}+i\sin\frac{2\pi(k+1)}{n}\right\}\\
&=\left(\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}\right)+\left(\cos\frac{6\pi}{n}+i\sin\frac{6\pi}{n}\right)+\left(\cos\frac{8\pi}{n}+i\sin\frac{8\pi}{n}\right)+\cdots\\
&\qquad\cdots+\left(\cos\frac{2n\pi}{n}+i\sin\frac{2n\pi}{n}\right)+\left(\cos\frac{2(n+1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n+1)\pi}{n}\right)\\
&=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)+\left(\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}\right)+\left(\cos\frac{6\pi}{n}+i\sin\frac{6\pi}{n}\right)+\cdots\\
&\qquad\cdots+\left(\cos\frac{2n\pi}{n}+i\sin\frac{2n\pi}{n}\right)\\
&=z \qquad \left(\because\ \cos\frac{2(n+1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n+1)\pi}{n}=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)
\end{aligned}
$$

(証明終)

(3) (2)より, $z\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}-1\right)=0$

ここで, $n\geqq 2$ より, $\cos\frac{2\pi}{n}\neq 1$, $\sin\frac{2\pi}{n}\neq 1$ とわかり, $\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}-1\neq 0$

$\therefore\ z=0$

つまり,

$$
\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)+\left(\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}\right)+\left(\cos\frac{6\pi}{n}+i\sin\frac{6\pi}{n}\right)+\cdots+\left(\cos\frac{2n\pi}{n}+i\sin\frac{2n\pi}{n}\right)=0
$$

$$
\Longleftrightarrow\ \left(\underbrace{\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{2n\pi}{n}}_{\text{(実部)}}\right)+i\left(\underbrace{\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{2n\pi}{n}}_{\text{(虚部)}}\right)=0
$$

複素数相当の原理より

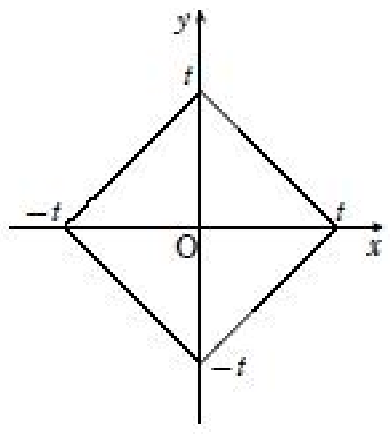
$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2\pi k}{n}=0$ かつ $\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2\pi k}{n}=0$ (証明終)

2．

(1)

$$|x|+|y|=t \text{ は } \begin{cases} x+y=t & (x\geqq 0,\ y\geqq 0) \\ x-y=t & (x\geqq 0,\ y\leqq 0) \\ -x+y=t & (x\leqq 0,\ y\geqq 0) \\ -x-y=t & (x\leqq 0,\ y\leqq 0) \end{cases}$$

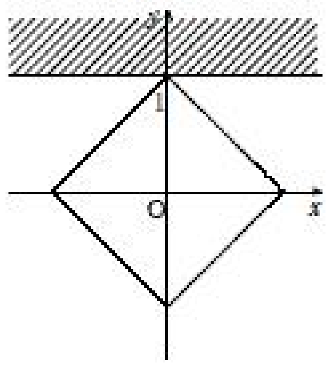
図示すると右図の通り．



(2)　領域 $\begin{cases} ax+(2-a)y\geqq 2 \\ y\geqq 0 \end{cases}$ と $|x|+|y|=t$ が共有点を (x,y) をもつように変化するときの実数 t の最小値 (m) を求める．（ただし，$a\geqq 0$）

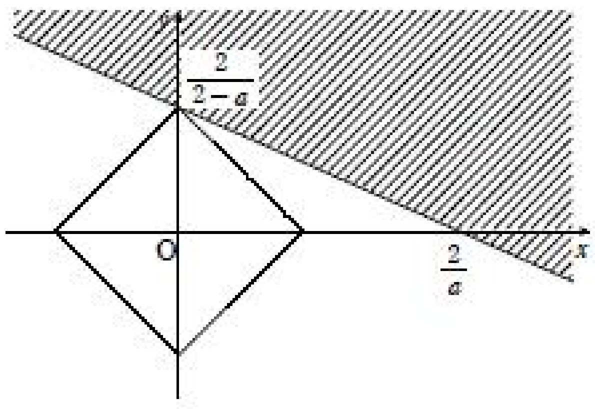
(i)　$a=0$ のとき，

領域 $\begin{cases} y\geqq 1 \\ y\geqq 0 \end{cases}$　　$\therefore\ \underline{m=1}$



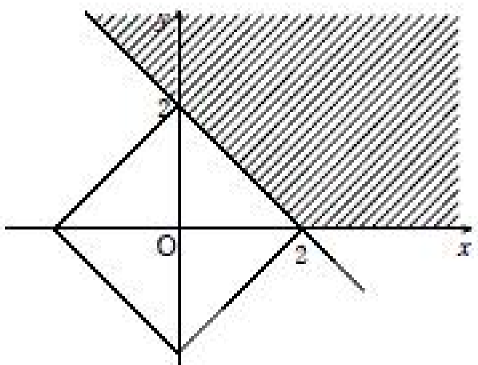
(ii)　$0<a<1$ のとき，

領域 $\begin{cases} y\geqq -\dfrac{a}{2-a}x+\dfrac{2}{2-a} \\ y\geqq 0 \end{cases}$　　$\therefore\ \underline{m=\dfrac{2}{2-a}}$



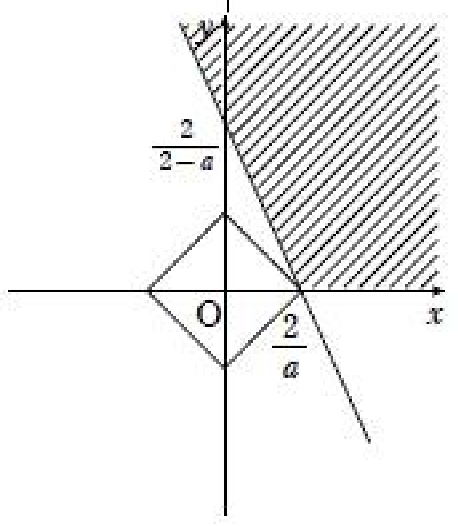
(iii)　$a=1$ のとき，

領域 $\begin{cases} y\geqq -x+2 \\ y\geqq 0 \end{cases}$　　$\therefore\ \underline{m=2}$



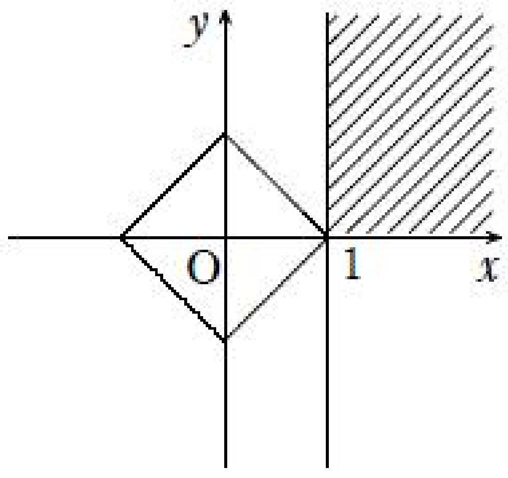
(iv)　$1<a<2$ のとき，

領域 $\begin{cases} y\geqq -\dfrac{a}{2-a}x+\dfrac{2}{2-a} \\ y\geqq 0 \end{cases}$　　$\therefore\ \underline{m=\dfrac{2}{a}}$



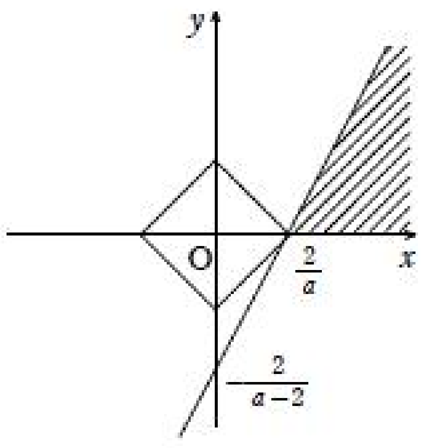
(v)　$a=2$ のとき，

領域 $\begin{cases} x\geqq 1 \\ y\geqq 0 \end{cases}$　　$\therefore\ \underline{m=1}$



(vi)　$a>2$ のとき，

領域 $\begin{cases} y\leqq \dfrac{a}{a-2}x-\dfrac{2}{a-2} \\ y\geqq 0 \end{cases}$　　$\therefore\ \underline{m=\dfrac{2}{a}}$



以上 (i)～(vi) をまとめて，

$$\therefore\ m=\begin{cases} \dfrac{2}{2-a} & (0\leqq a\leqq 1) \\ \dfrac{2}{a} & (a>1) \end{cases}$$　……(答)

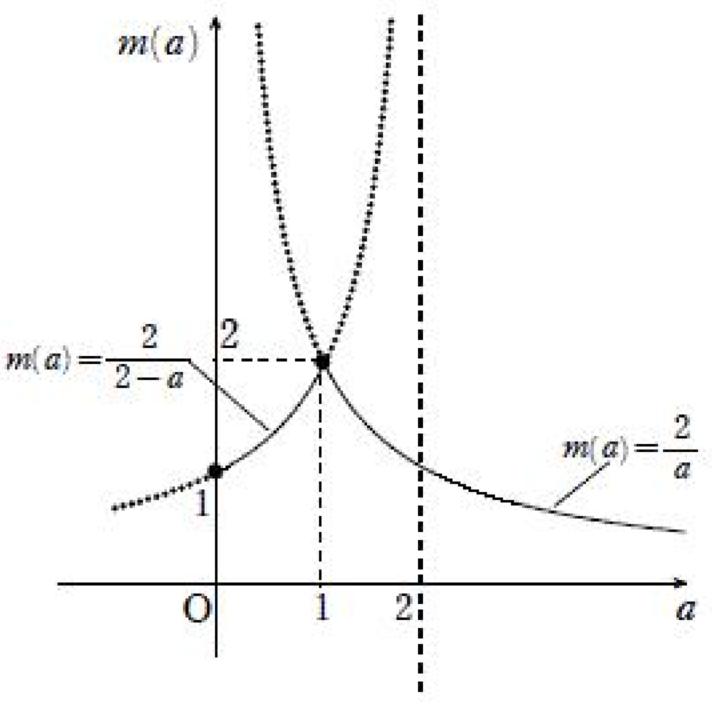
(3)　(2) の結果を用いて，

$$m(a)=\begin{cases} \dfrac{2}{2-a} & (0\leqq a\leqq 1) \\ \dfrac{2}{a} & (a>1) \end{cases}$$

とする．$m(a)$ は $a=1$ にて連続である．

グラフに描くと右図の通り．グラフより，

$\therefore$ $\underline{(\text{最大値})=m(1)=2}$　……(答)



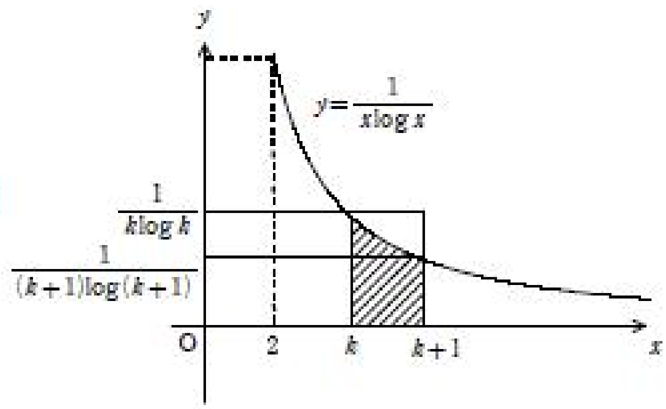
3．

(1) $$\int_n^{n^3}\frac{dx}{x\log x}=\Big[\log(\log x)\Big]_n^{n^3}=\log(\log n^3)-\log(\log n)$$
$$=\log 3+\log(\log n)-\log(\log n)$$
$$=\underline{\log 3}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $y=\dfrac{1}{x\log x}$ $(x\geqq 2)$について

$$y'=\frac{-\left(1\cdot\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}\right)}{(x\log x)^2}=-\frac{\log x+1}{(x\log x)^2}<0$$ より

$y=\dfrac{1}{x\log x}$は，$x\geqq 2$において単調減少．



区間$[k, k+1]$において，右図のグラフより，

$$\frac{1}{(k+1)\log(k+1)}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{x\log x}<\frac{1}{k\log k}\quad\cdots\cdots①$$

と表せる（評価できる）（証明終）

(3) ①で$k=n, n+1, n+2, \cdots, n^3-1$を代入し辺々和をとる．

$$\frac{1}{(n+1)\log(n+1)}+\frac{1}{(n+2)\log(n+2)}+\cdots\frac{1}{n^3\log n^3}$$
$$<\int_n^{n^3}\frac{dx}{x\log x}<\frac{1}{n\log n}+\frac{1}{(n+1)\log(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(n^3-1)\log(n^3-1)}$$
$$\Longleftrightarrow S_n-\frac{1}{n\log n}+\frac{1}{n^3\log n^3}<\log 3<S_n$$
$$\Longleftrightarrow \log 3<S_n<\log 3+\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{n^3\log n^3}\quad\cdots\cdots②$$

(②の最右辺)$\to\log 3$ $(n\to\infty)$

はさみうちの原理より $\underline{\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\log 3}$ ……(答)

4．

(1)

$$x^3+3x^2-14x+16$$
$$=(x^2-2x)(x+5)-4x+6$$
$$\therefore\ \underline{(\text{商})=x+5,\ (\text{余り})=-4x+6}\quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$\begin{array}{r}
x+5 \\
x^2-2x\,\overline{\big)\,x^3+3x^2-14x+6} \\
\underline{x^3-2x^2} \\
5x^2-14x \\
\underline{5x^2-10x} \\
-4x+6
\end{array}$$

(2) (1)より,

$$X=(a^2-2a)(a+5)-4a+6$$
$$=Y(a+5)-4a+6$$
$$\Longleftrightarrow X-5Y-6+(4-Y)a=0$$

これより, $\begin{cases} X-5Y-6=0 \\ 4-Y=0 \end{cases}$ $\therefore\ \underline{(X,Y)=(26,4)}$ $\cdots\cdots$(答)

(3) (2)より, $Y=4$ を用いて

$$a^2-2a=4$$
$$\Longleftrightarrow a^2-2a-4=0$$

$\therefore\ \underline{a=1+\sqrt{5}\quad(>0)}$ $\cdots\cdots$(答)

5．

(1)　$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ $(x\geqq 1)$ とおく.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}$$

$$=\frac{1-\log x}{x^2}$$

増減表を描くと右の通り.

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$	$(+\infty)$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	(0)

これより,

$$f(x)\leqq f(e)\ (x\geqq 1)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\log x}{x}\leqq\frac{1}{e}\left(<\frac{1}{2}\right)\ (x\geqq 1)$$

$$\therefore\ 2\log x<x\ (x\geqq 1)$$

$\therefore$ $x>2\log x$ $(x\geqq 1)$ は示された.　（証明終）

(2)　n は自然数より $n\geqq 1$

(1) の結果を用いて,

$$2\log n<n$$

$$\Longleftrightarrow 2n\log n<n^2$$

$$\therefore\ (2n\log n)^n<(n^2)^n$$

$$\Longleftrightarrow (2n\log n)^n<n^{2n}$$

$n=e^{\log n}$ より,

$$\Longleftrightarrow (2n\log n)^n<\left(e^{\log n}\right)^{2n}$$

$\therefore$ $(2n\log n)^n<e^{2n\log n}$ は示された.（証明終）