

(1) l が y 軸平行だとする.

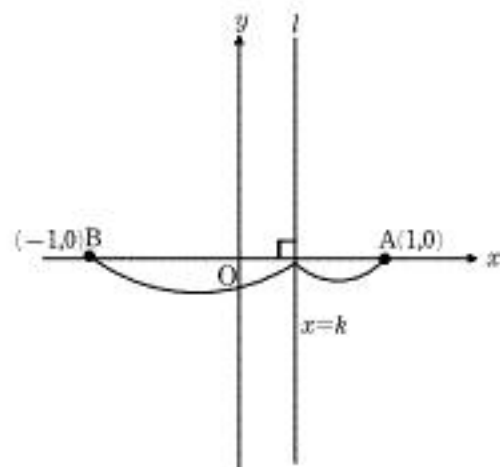
$x=k$ (ただし, $k \geq 1, k \leq -1$ は明らかに不適より,

$-1 < k < 1$ で考える)

ここで, A と l の距離と B と l の距離の和を L とすれば,

$$L = (1-k) + (k+1) = 2$$

となり矛盾. つまり, l が y 軸平行でない. (証明終)



(2) $-1 \leq i \leq 1$ の実数 i を用いて,

$l: y = m(x-i)$ (ただし, 実数 m は傾き)

$$\Leftrightarrow mx - y - mi = 0$$

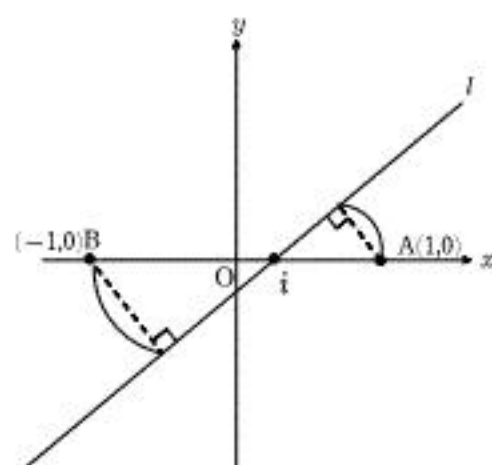
$$L = \frac{|-m-mi|}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{|m-mi|}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$= \frac{|1+i||m|}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{|1-i||m|}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$= \frac{(1+i+1-i)|m|}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$= \frac{2|m|}{\sqrt{m^2+1}}$$

($\because -1 \leq i \leq 1$)



ここで, $L=1$ より, $2|m| = \sqrt{m^2+1}$

$$4m^2 = m^2 + 1 \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{3} \quad \therefore m = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \underline{(l \text{ の傾き}) = m = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

(3) (2)を用いて考える. $i > 1$ または $i < -1$ とする.

$$L = \frac{(|1+i| + |1-i|)|m|}{\sqrt{m^2+1}}$$

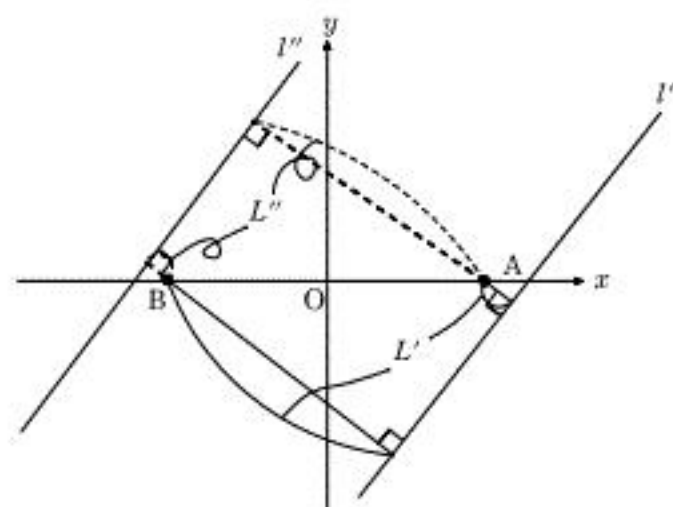
と表せる.

ここで, 図形対称性 (右図の $L' = L''$) より,

$i > 1$ としても一般性は失わない.

$$L = \frac{(1+i-1+i)|m|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{2i|m|}{\sqrt{m^2+1}}$$

ここで, $L=1$ より, $2i|m| = \sqrt{m^2+1}$ ①



$$(l \text{ と原点 } O \text{ との距離}) = \frac{|-mi|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{i|m|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{1}{2} \quad (\text{これは } l \text{ が } x \text{ 軸平行な場合も満たす})$$

($\because$ ①)

(1) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3a$ と $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2ax - a^3 - a^2$ を連立.

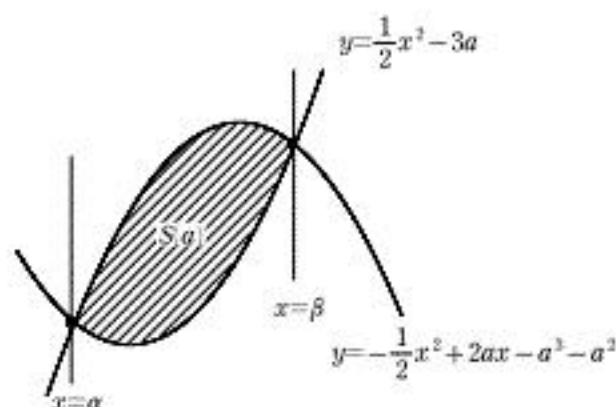
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^2 - 3a &= -\frac{1}{2}x^2 + 2ax - a^3 - a^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^3 + a^2 - 3a &= 0 \quad \dots\dots ①\end{aligned}$$

①が異なる2実解をもつから,

$$\begin{aligned}D/4 &= a^2 - (a^3 + a^2 - 3a) > 0 \\ \Leftrightarrow a^3 - 3a &< 0 \\ \Leftrightarrow \underbrace{a(a + \sqrt{3})(a - \sqrt{3})}_{(+)} &< 0 \\ \Leftrightarrow a - \sqrt{3} &< 0 \quad (\because a > 0) \\ \therefore 0 < a &< \sqrt{3}\end{aligned}$$

(2) $0 < a < \sqrt{3}$ の下で①の異なる2実解を $x = \alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$) とおく.
解と係数の関係により,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2a \\ \alpha\beta = a^3 + a^2 - 3a \end{cases} \quad \dots\dots ②$$



$$\begin{aligned}S(a) &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2ax - a^3 - a^2 \right) - \left(\frac{1}{2}x^2 - 3a \right) \right\} dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{6} \{ (\beta - \alpha)^2 \}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{6} \{ (2a)^2 - 4(a^3 + a^2 - 3a) \}^{\frac{3}{2}} \quad (\because ②) \\ &= \frac{1}{6} (12a - 4a^3)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

$$\therefore \underline{S(a) = \frac{4}{3}(3a - a^3)^{\frac{3}{2}} \quad (0 < a < \sqrt{3})}$$

(3) $f(a) = 3a - a^3$ ($0 < a < \sqrt{3}$) とおく.

$$\begin{aligned}f'(a) &= 3 - 3a^2 \\ &= 3(1 + a)(1 - a)\end{aligned}$$

a	(0)	...	1	...	($\sqrt{3}$)
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$	(0)	$\nearrow$	2	$\searrow$	(0)

(最大)

増減表より, $a = 1$ のとき, $f(a)$ は最大値 2 となる.

$$S'(a) = \frac{4}{3} \{ f(a) \}^{\frac{3}{2}} \text{ より, 「} f(a) \text{ が最大するとき」} \Leftrightarrow \text{「} S'(a) \text{ が最大するとき」}$$

$$\therefore \underline{(S'(a) \text{ の最大値}) = S'(1) = \frac{4}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \quad (a = 1 \text{ のとき})}$$

- (1) 正の実数 x, y に対して, $\frac{y}{x}, \frac{x}{y}$ も正となる.

相加平均・相乗平均の関係により,

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y}}$$

$$\therefore \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2 \quad \left(\text{等号成立は } \frac{y}{x} = \frac{x}{y}, \text{ つまり } x = y \text{ のとき成立} \right) \quad (\text{証明終})$$

- (2) 「 $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2 \quad (n \geq 1)$ 」… (※) を数学的帰納法で示す.

(I) $n=1$ のとき $a_1 \cdot \frac{1}{a_1} = 1 \geq 1^2$ は成立.

(II) $n=k \quad (k \geq 1)$ で成立を仮定 つまり

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} \right) \geq k^2 \quad \text{とする.}$$

ここで, $\underbrace{(a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1})}_A \left(\underbrace{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_{k+1}}}_B \right)$ において,

上式のように各 A, B を定める, $\left(A > 0, B > 0, \underbrace{AB \geq k^2}_{\text{(仮定)}} \right)$

$$\begin{aligned} (A + a_{k+1}) \left(B + \frac{1}{a_{k+1}} \right) &= \underline{AB} + \frac{A}{a_{k+1}} + Ba_{k+1} + 1 \\ &\geq \underline{k^2} + \frac{a_1}{a_{k+1}} + \frac{a_2}{a_{k+1}} + \dots + \frac{a_k}{a_{k+1}} + \frac{a_{k+1}}{a_1} + \frac{a_{k+1}}{a_2} + \dots + \frac{a_{k+1}}{a_k} + 1 \\ &\quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad \quad \quad} \xrightarrow{\quad \quad \quad} \xrightarrow{\quad \quad \quad} \xrightarrow{\quad \quad \quad} \xrightarrow{\quad \quad \quad} \xrightarrow{\quad \quad \quad} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{(すべて (I) より 2 以上)} \end{array} \end{aligned}$$

$$\geq k^2 + 2k + 1$$

$$\therefore (a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1}) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_{k+1}} \right) \geq (k+1)^2 \quad \text{となり } n = k+1 \text{ でも成立.}$$

以上 (I) (II) より (※) は示された. (証明終)

$$\left(\begin{array}{l} \text{等号成立は } n=1 \text{ のとき } a_1 \text{ は任意の正の実数,} \\ n \geq 2 \text{ のとき, } a_1 = a_2 = \dots = a_n \text{ の正の実数となる} \end{array} \right)$$