1.

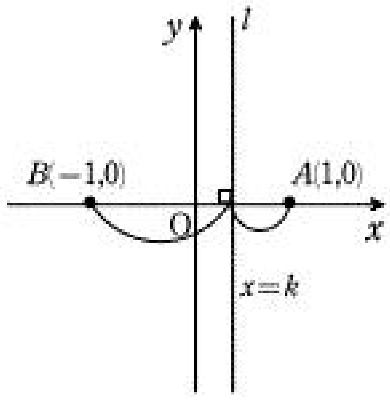
(1)　lがy軸平行だとする

$x=k$（ただし, $k \geqq 1$, $k \leqq -1$は明らかに不適より $\underline{-1<k<1}$で考える）

ここで, Aとlの距離とBとlの距離の和をLとすれば,

$$L=(1-k)+(k+1)=2$$

となり矛盾, つまり, lはy軸平行ではない（証明終）



(2)　$-1 \leqq i \leqq 1$の実数iを用いて,

$l : y=m(x-i)$　（ただし, 実数mは傾き）

$\Longleftrightarrow mx-y-mi=0$

$$L=\frac{|-m-mi|}{\sqrt{m^2+1}}+\frac{|m-mi|}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$=\frac{|1+i||m|}{\sqrt{m^2+1}}+\frac{|1-i||m|}{\sqrt{m^2+1}}$$

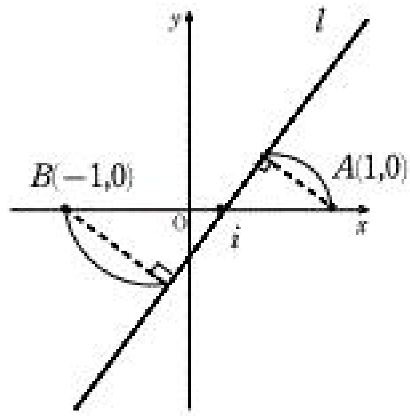
$$=\frac{(1+i+1-i)|m|}{\sqrt{m^2+1}} \quad (\because -1 \leqq i \leqq 1)$$

$$=\frac{2|m|}{\sqrt{m^2+1}}$$

ここで, $L=1$より$2|m|=\sqrt{m^2+1}$

$\therefore 4m^2=m^2+1 \Longleftrightarrow m^2=\frac{1}{3}$　$\therefore m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore$（lの傾き）$=m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$



(3)　(2)を用いて考える

$i>1$または$i<1$とする

$$L=\frac{(|1+i|+|1-i|)|m|}{\sqrt{m^2+1}}$$

と表せる

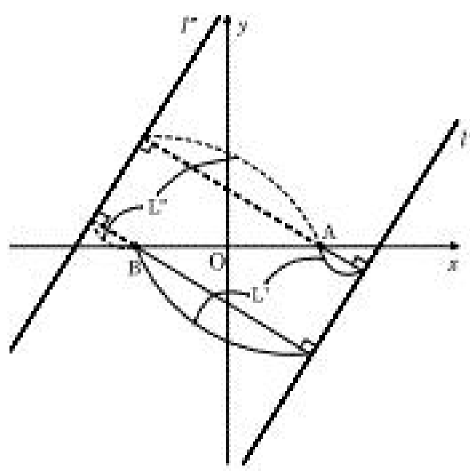
ここで, 図形対称性（右図の $L'=L''$）より$i>1$としても一般性は失わない

$$L=\frac{(1+i-1+i)|m|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{2i|m|}{\sqrt{m^2+1}}$$

ここで, $L=1$より$2i|m|=\sqrt{m^2+1}$　………①

（lと原点Oとの距離）$=\frac{|-mi|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{i|m|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{2}$ $\left(\text{これは } l \text{ が } x \text{ 軸平行な場合も満たす}\right)$

（$\because$①）



2.

（1）　$P = A - xE = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-x & -1 \\ 2 & 1-x \end{pmatrix}$ ………①

ケーリー・ハミルトンの公式より

$P^2 - (5-2x)P + (x^2 - 5x + 6)E = 0$ ………②

ここで，$P^2 = P$ より②は　$(4-2x)P = (x-2)(x-3)E$

$\iff 2(2-x)P = (2-x)(3-x)E$

（ｉ）$x = 2$ のとき　②は $P^2 = P$ で成立

（ii）$x \neq 2$ のとき　$P = \dfrac{3-x}{2}E = kE$　（実数 k は $k = \dfrac{3-x}{2}$）

ここで，$P^2 = P \iff (k^2 - k)E = 0$　$\therefore k = 0, 1$

$(k=0)\ P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(k=1)\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

いずれも①の成分に矛盾

以上（ｉ）（ii）より　$\underline{x = 2}$

（2）（1）より $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$　ここで　$AP = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = 3P$

$A^n = a_n P + b_n E$　の左より行列 A を掛ける

$A \cdot A^n = a_n AP + b_n AE$

$\iff A^{n+1} = 3a_n P + b_n A$

$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= A - 2E$

だから

$= 3a_n P + b_n(P + 2E)$

$= \underbrace{(3a_n + b_n)}_{a_{n+1}}P + \underbrace{2b_n}_{b_{n+1}}E$

これより $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2b_n \end{cases}$　（ただし，$a_1 = 1,\ b_1 = 2$）

これより，一般項 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を求めると $\underline{\begin{cases} a_n = 3^n - 2^n \\ b_n = 2^n \end{cases}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)}$

3.

(1) $f(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ より $\quad \underline{\frac{d}{dx}f(x)=\frac{1}{1+x^2}}$

(2) $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ より

$$\frac{d}{dx}g(x)=\frac{d}{dx}f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$=-\frac{1}{x^2+1} \qquad \therefore \ \underline{\frac{d}{dx}g(x)=-\frac{1}{x^2+1}}$$

(3) $F(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$ とおく．

$$F'(x)=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2+1}=0$$

つまり，$\underline{F(x)=C}$（C：積分定数）

ここで，

$$F(1)=f(1)+f(1)=2f(1)=2\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$$

$$t=\tan\theta \qquad \therefore \ dt=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta \qquad \begin{array}{c|ccc} t & 0 & \to & 1 \\ \hline \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{4} \end{array}$$

$$F(1)=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=2\cdot\frac{\pi}{4}=\underline{\frac{\pi}{2}\ (=C)}$$

$$\therefore \ \underline{F(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}}$$

4.

(1) $e^3 < \underset{27}{\underset{\|}{3^3}} < \underset{32}{\underset{\|}{2^5}}$ より　$e^3 < 2^5$

辺々対数をとる（ただし，底は e ）.

$$\log e^3 < \log 2^5 \iff 3 < 5\log 2 \iff \underline{\log 2 > \frac{3}{5}\ （証明終）}$$

(2) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} - x \quad (x \neq (2n+1)\pi)$

$$f'(x) = \frac{\cos x(1+\cos x) - \sin x\cdot(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} - 1$$

$$= \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2} - 1$$

$$= \frac{1}{1+\cos x} - 1 \qquad \therefore\ \underline{f'(x) = -\frac{\cos x}{1+\cos x}}$$

(3)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{1+\cos x}dx$$

$(\because (2))$

$$= \Big[-\log(1+\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\sin x}{1+\cos x} - x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \log 2 + 1 - \frac{\pi}{2} \qquad \therefore\ \underline{I = \log 2 + 1 - \frac{\pi}{2}}$$

(4)

$$I = \log 2 + 1 - \frac{\pi}{2}$$

$\left(\because (1)の\ \log 2 > \frac{3}{5}\right)$

$$> \frac{3}{5} + 1 - \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{10}(16 - 5\pi)$$

$$> \frac{1}{10}(16 - 5\times 3.2) \quad (\because\ \pi < 3.2)$$

$$= 0 \qquad \therefore\ \underline{I > 0\ \left(I = \log 2 + 1 - \frac{\pi}{2}\ は正\right)}$$

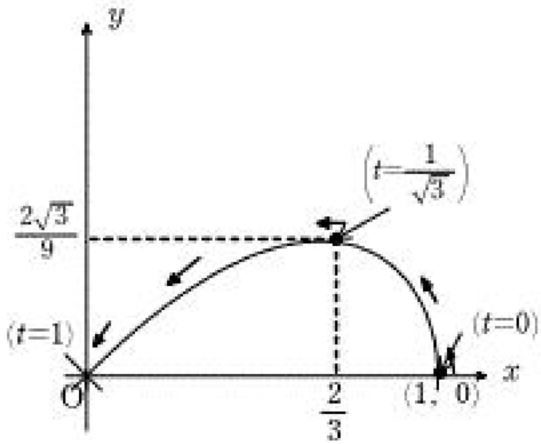
5.

(1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2t \\ \dfrac{dy}{dt} = 1-3t^2 \end{cases}$

増減表を描くと下図の通り

ただし，$\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$ とする．

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$\frac{dx}{dt}$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
x	1		$\frac{2}{3}$		0
$\frac{dy}{dt}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y	0		$\frac{2\sqrt{3}}{9}$		0
(x, y)	$(1, 0)$		$\left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$		$(0, 0)$
$\vec{v}$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	$\swarrow$



曲線 C の概形は右図の通り．

(2) 求める回転体の体積を V_y とおく．

$$\begin{cases} x = 1-t^2 \\ y = t-t^3 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdots x = x_1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqq t \leqq 1 \cdots x = x_2 \end{array}\right) \quad \text{に対して} \qquad dy = (1-3t^2)dt$$

$$\begin{aligned} V_y &= \pi\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{9}} {x_1}^2 dy - \pi\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{9}} {x_2}^2 dy \\ &= \pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (1-t^2)^2(1-3t^2)dt - \pi\int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (1-t^2)^2(1-3t^2)dt \\ &= \pi\int_0^1 (1-t^2)^2(1-3t^2)dt \\ &= \pi\int_0^1 (-3t^6+7t^4-5t^2+1)dt \\ &= \pi\left[-\frac{3}{7}t^7+\frac{7}{5}t^5-\frac{5}{3}t^3+t\right]_0^1 \\ &= \frac{32}{105}\pi \end{aligned}$$

$$\therefore \ \underline{V_y = \frac{32}{105}\pi}$$