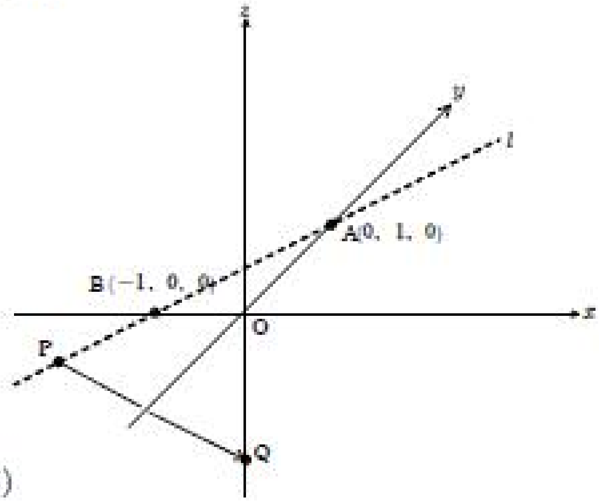
1

(1)　2点P, Qは実数s, tを用いて

$$\overrightarrow{OP}=(0,1,0)+s(-1,-1,0) \qquad \therefore\ P(-s,1-s,0)$$

$$\overrightarrow{OQ}=t(0,0,1) \qquad \therefore\ Q(0,0,t)$$



これより，

$$\overrightarrow{PQ}=(s,s-1,t)//(3,1,-1)$$

$$\begin{cases} s=3k \\ s-1=k \qquad (k:\text{実数}) \\ t=-k \end{cases}$$

$$\therefore\ s=\frac{3}{2},\ t=-\frac{1}{2},\ k=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ P\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right),\ Q\left(0,\ 0,\ -\frac{1}{2}\right) \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)　(1)のP→R，Q→Sと置き換えてみれば，実数s', t'を用いて
$R(-s',1-s',0)$, $S(0,0,t')$と表せる．

$$\overrightarrow{RS}=(s',s'-1,t')$$

ここで，

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{AB}=(s',s'-1,t')\cdot(-1,-1,0) \\ \qquad\qquad =-s'-s'+1=0 \\ \overrightarrow{RS}\cdot(0,0,1)=t'=0 \end{cases} \qquad \therefore\ s'=\frac{1}{2},\ t'=0$$

$$\therefore\ R\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right),\ S(0,\ 0,\ 0) \qquad \cdots(\text{答})$$

(3)　(1)のP→T，Q→Uと置き換えてみれば，実数s'', t''を用いて
$T(-s'',1-s'',0)$, $U(0,0,t'')$

$$\overrightarrow{TU}=(s'',s''-1,t'')$$

$$\begin{cases} \vec{v}=(a,b,c)\neq(0,0,0) \\ \vec{v}\cdot\overrightarrow{RS}=(a,b,c)\cdot\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\neq 0 \quad (a\neq b) \end{cases} \quad \cdots①$$

ここで，

$$\overrightarrow{TU}//\vec{v}$$

$$\Longleftrightarrow\ (s'',s''-1,t'')//(a,b,c)$$

$$\begin{cases} s''=k'a \\ s''-1=k'b \quad (k':\text{実数}) \\ t''=k'c \end{cases}$$

$$\therefore\ s''=\frac{a}{a-b},\ t''=\frac{c}{a-b},\ k'=\frac{1}{a-b}$$

$$\therefore\ T\left(-\frac{a}{a-b},\ -\frac{b}{a-b},\ 0\right),\ U\left(0,\ 0,\ \frac{c}{a-b}\right) \qquad \cdots(\text{答})$$

2

$P(p,\ p^2)$ と $R(r,\ r^2)$ の(距離)^2 は,

$$(r-p)^2+(r^2-p^2)^2=1$$

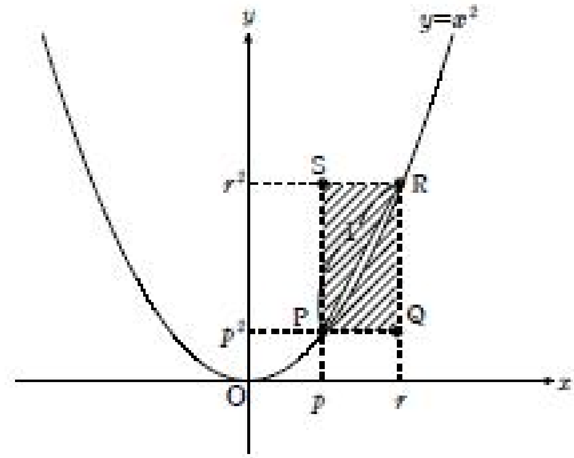
$$\iff (r-p)^2\{1+(r+p)^2\}=1 \qquad \cdots①$$

ここで, $-r<p<r\ \ (|p|<r)$ より,

$$p^2<r^2$$

$$\begin{aligned}(\text{長方形 PQRS の面積}) &= (r-p)(r^2-p^2)\\ &= (r-p)^2(r+p)\\ &= \frac{r+p}{1+(r+p)^2}\end{aligned}$$

①より



ここで, $x=r+p$ ($0<r+p<2r$ より $0<x<2r$) とおくと,

$$(\text{長方形 PQRS の面積})=\frac{x}{1+x^2}=\frac{1}{\frac{1}{x}+x}\leqq\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot x}}=\frac{1}{2} \qquad (\text{最大値})$$

(相加･相乗平均の関係より)

等号成立（最大値をとるとき）は,

$$x=\frac{1}{x}$$

$$\iff x^2=1$$

$$\iff x=1\ (>0) \qquad \therefore\ r+p=1$$

このとき, ①より,

$$r-p=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ (r-p>0\ \text{だから})$$

$$\therefore\ r=\frac{2+\sqrt{2}}{4},\ p=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore\ \left[(\text{長方形 PQRS の面積})\text{の最大値}\right]=\frac{1}{2} \qquad \cdots(\text{答})$$

このときの点 P, R の x 座標 P_x, R_x は,

$$P_x=\frac{2-\sqrt{2}}{4},\ R_x=\frac{2+\sqrt{2}}{4} \qquad \cdots(\text{答})$$

3

(1)　点$(0,0)$を$y=f(x)$が通るから，$f(x)=px^2+qx$　（pとqは実数）とする．

$$f(c)=pc^2+qc=c^3-2c \quad \cdots①$$

$$f(1)=p+q=-1 \quad \cdots②$$

②を①に代入して，

$$pc^2+c(-p-1)=c^3-2c$$

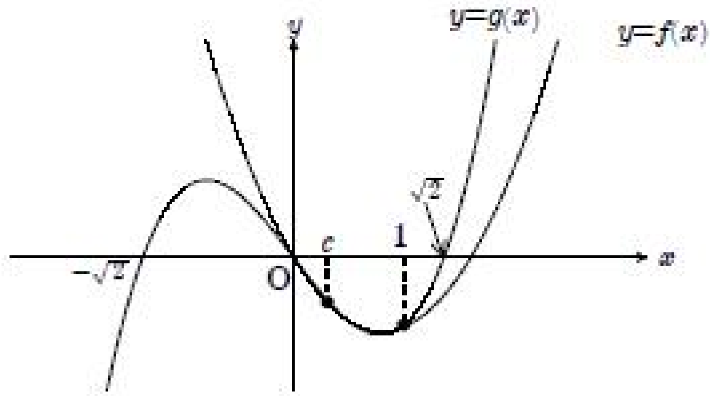
$$\therefore\ p=c+1,\ q=-c-2$$

$$\therefore\ f(x)=(c+1)x^2-(c+2)x$$

（cは$0<c<1$を満たす実数）　…（答）

(2)　$g(x)=x^3-2x$とおくと，

$y=f(x)$と$y=g(x)$は右図の通り．



ここで，

$$x^3-2x=(c+1)x^2-(c+2)x$$

$$\Longleftrightarrow\ x^3-(c+1)x^2+cx=0$$

$$\Longleftrightarrow\ x(x-1)(x-c)=0$$

$$\therefore\ x=\underline{\underline{0,1,c}}\ \ (0<c<1)$$

$$\begin{cases} g(x)\geqq f(x) & (0\leqq x\leqq c) \\ f(x)\geqq g(x) & (c\leqq x\leqq 1) \end{cases}$$

$$S=\int_0^c\{g(x)-f(x)\}dx+\int_c^1\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_0^c\{x^3-(c+1)x^2+cx\}dx-\int_c^1\{x^3-(c+1)x^2+cx\}dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{c+1}{3}x^3+\frac{cx^2}{2}\right]_0^c-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{c+1}{3}x^3+\frac{cx^2}{2}\right]_c^1$$

$$=-\frac{1}{6}c^4+\frac{1}{3}c^3-\frac{1}{6}c+\frac{1}{12}\ \ (0<c<1)$$

…（答）

(3)　$S=S(c)$とする．

$$S'(c)=-\frac{2}{3}c^3+c^2-\frac{1}{6}$$

$$=-\frac{1}{6}(4c^3-6c^2+1)$$

$$=-\frac{1}{6}(2c-1)\underbrace{\underline{\underline{(2c^2-2c-1)}}}_{(-)}$$

c	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$S'(c)$		$-$	0	$+$	
$S(c)$		↘	（最小）	↗	

$c=\dfrac{1}{2}$にて，$S(c)$は最小となる．$\therefore\ c=\dfrac{1}{2}$　…（答）

4

(1)
$$\int_0^{\pi} f(x)dx=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\pi}\{f(x)\}^3dx$$

$$\iff \int_0^{\pi}(a\cos x+b)dx=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\pi}(a^3\cos^3 x+3a^2b\cos^2 x+3ab^2\cos x+b^3)dx$$

$$\iff \int_0^{\pi}(a\cos x+b)dx=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\pi}\left(a^3\frac{\cos 3x+3\cos x}{4}+3a^2b\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}+3ab^2\cos x+b^3\right)dx$$

$$\iff [a\sin x+bx]_0^{\pi}=\frac{\pi}{4}+\left[\frac{a^3}{4}\left(\frac{1}{3}\sin 3x+3\sin x\right)+\frac{3a^2b}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+3ab^2\sin x+b^3x\right]_0^{\pi}$$

$$\iff b\pi=\frac{\pi}{4}+\frac{3a^2b}{2}\pi+b^3\pi$$

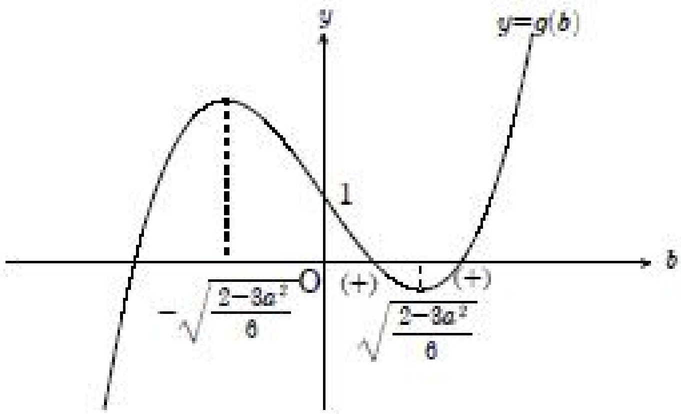
$$\therefore\ 4b^3+2(3a^2-2)b+1=0 \qquad \cdots(答)$$

(2) $g(b)=4b^3+2(3a^2-2)b+1$ とおく．

$$g'(b)=12b^2+2(3a^2-2)$$

(i) $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}<a<\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき

b	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{2-3a^2}{6}}$	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{2-3a^2}{6}}$	$\cdots$
$g'(b)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(b)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$



ここで，

$$g\left(\sqrt{\frac{2-3a^2}{6}}\right)=1-\frac{2\sqrt{6}}{9}(2-3a^2)\sqrt{2-3a^2}\leqq 0$$

$$\iff \frac{27}{8}\leqq(2-3a^2)^3$$

$$\iff a^2\leqq\frac{1}{6}\quad \therefore\ -\frac{\sqrt{6}}{6}\leqq a\leqq\frac{\sqrt{6}}{6}\qquad \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}<a<\frac{\sqrt{6}}{3}\text{ を満たす}\right)$$

(ii) $a\leqq-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\dfrac{\sqrt{6}}{3}\leqq a$ のとき　$g'(b)\geqq 0$ となり，$g(0)=1$ より，不適．

以上，(i)，(ii) より，$-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\leqq a\leqq\dfrac{\sqrt{6}}{6}$　$\cdots$（答）

5

(1) 事象$(E)\cdots\leftrightarrow$（辺ABと平行な移動）$\cdots\dfrac{1}{3}$

事象$(F)\cdots\updownarrow$（辺ADと平行な移動）$\cdots\dfrac{2}{3}$

とする．

$$a_1=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\leftarrow(F\to F\ \ \text{or}\ \ E\to E)$$
$$=\frac{5}{9}\qquad\cdots\text{（答）}$$

(2) 「さいころを$2n$回振る．動点PはA or Cにいる$(n=1,2,3,\cdots)$．」…（※）を示す．

（Ⅰ） $n=1$のとき

$$\begin{cases}A\to D\to C\\A\to D\to A\\A\to B\to C\\A\to B\to A\end{cases}$$ 2回振った後は動点PはA or Cのいずれか．

（Ⅱ） $n=k$で成立を仮定する．つまり，$2k$回振った後に動点PはA or Cのいずれかにいると仮定して，$2k+2$回振った後を考える．

$2k$回　　$(2k+2)$回

A → D → C

A → D → A

A → B → C

A → B → A

C → D → A

C → D → C

C → B → A

C → B → C

これより，$(2k+2)$回後もA or Cのいずれかとなる．

以上，（Ⅰ）（Ⅱ）より，題意（※）は示された．（証明終）

(3) (2)より，$a_n+c_n=1$

$2n$回と$(2n+2)$後の推移図を考える．

$2n$回　　$(2n+2)$回

頂点A　$a_n\xrightarrow{\times\frac{5}{9}}a_{n+1}$

頂点C　$c_n\xrightarrow{\times\frac{4}{9}}a_{n+1}$　　c_{n+1}

$$\therefore\ \begin{cases}a_{n+1}=\dfrac{5}{9}a_n+\dfrac{4}{9}c_n & \cdots\cdots①\\ a_n+c_n=1 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

②より，$c_n=1-a_n$だから，①へ代入して，

$$a_{n+1}=\frac{5}{9}a_n+\frac{4}{9}(1-a_n)$$
$$\iff a_{n+1}=\frac{1}{9}a_n+\frac{4}{9}$$
$$\iff a_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{9}\left(a_n-\frac{1}{2}\right)$$

数列$\left\{a_n-\dfrac{1}{2}\right\}$は初項$a_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{9}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{18}$，公比$\dfrac{1}{9}$の等比数列より，

$$a_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{18}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$
$$\therefore\ a_n=\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\},\ c_n=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}\ (n=1,2,3,\cdots)\qquad\cdots\text{（答）}$$

(4)
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}=\frac{1}{2}\quad\cdots\text{（答）}$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}=\frac{1}{2}\quad\cdots\text{（答）}$$
$$\left(\because\ \left(\frac{1}{9}\right)^n\to0\ \ (n\to\infty)\right)$$