

(平 25 前)

数 学

(理 科 系)

(1 ～ 5 ページ)

- ・ ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点

1. 空間において, 2 点 $A(0, 1, 0)$, $B(-1, 0, 0)$ を通る直線を ℓ とする.
次の問いに答えよ. (配点 30 点)

(1) 点 P を ℓ 上に, 点 Q を z 軸上にとる. $\overrightarrow{PQ}$ がベクトル $(3, 1, -1)$ と平行になるときの P と Q の座標をそれぞれ求めよ.

(2) 点 R を ℓ 上に, 点 S を z 軸上にとる. $\overrightarrow{RS}$ が $\overrightarrow{AB}$ およびベクトル $(0, 0, 1)$ の両方に垂直になるときの R と S の座標をそれぞれ求めよ.

(3) R, S を (2) で求めた点とする. 点 T を ℓ 上に, 点 U を z 軸上にとる. また, $\vec{v} = (a, b, c)$ は零ベクトルではなく, $\overrightarrow{RS}$ に垂直ではないとする. $\overrightarrow{TU}$ が $\vec{v}$ と平行になるときの T と U の座標をそれぞれ求めよ.

2. p, r を $-r < p < r$ をみたす実数とする. 4点 $P(p, p^2)$, $Q(r, p^2)$, $R(r, r^2)$, $S(p, r^2)$ に対し, 線分 PR の長さは 1 であるとする. このとき, 長方形 $PQRS$ の面積の最大値と, そのときの P, R の x 座標をそれぞれ求めよ. (配点 30 点)

3. c を $0 < c < 1$ をみたす実数とする. $f(x)$ を 2 次以下の多項式とし, 曲線 $y = f(x)$ が 3 点 $(0, 0)$, $(c, c^3 - 2c)$, $(1, -1)$ を通るとする. 次の問いに答えよ. (配点 30 点)

(1) $f(x)$ を求めよ.

(2) 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = x^3 - 2x$ で囲まれた部分の面積 S を c を用いて表せ.

(3) (2) で求めた S を最小にするような c の値を求めよ.

4. a, b を実数とする. 次の問いに答えよ. (配点 30 点)

(1) $f(x) = a \cos x + b$ が,

$$\int_0^\pi f(x) dx = \frac{\pi}{4} + \int_0^\pi \{f(x)\}^3 dx$$

をみたすとする. このとき, a, b がみたす関係式を求めよ.

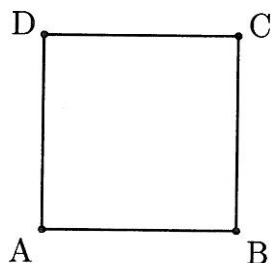
(2) (1) で求めた関係式をみたす正の数 b が存在するための a の条件を求めよ.

5. 動点 P が、図のような正方形 $ABCD$ の頂点 A から出発し、さいころをふるごとに、次の規則により正方形のある頂点から他の頂点に移動する.

出た目の数が 2 以下なら辺 AB と平行な方向に移動する.

出た目の数が 3 以上なら辺 AD と平行な方向に移動する.

n を自然数とすると、さいころを $2n$ 回ふった後に動点 P が A にいる確率を a_n , C にいる確率を c_n とする. 次の問いに答えよ.
(配点 30 点)



- (1) a_1 を求めよ.
- (2) さいころを $2n$ 回ふった後、動点 P は A または C にいることを証明せよ.
- (3) a_n, c_n を n を用いてそれぞれ表せ.
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ をそれぞれ求めよ.