

(1) 解と係数の関係により, $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\beta = -1 \end{cases} \dots\dots ①$

$c_n = \alpha^n + \beta^n$ と①より、

$$\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} = (\alpha + \beta)(\alpha^n + \beta^n) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})$$

$$\iff c_{n+1} = c_n + c_{n-1} \quad (n \geq 2) \quad (\text{証明終})$$

(2)

$$\begin{cases} c_1 = \alpha + \beta = 1 \\ c_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3 \\ c_3 = c_2 + c_1 = 4 \\ c_4 = c_3 + c_2 = 7 \end{cases}$$

$$\therefore y = x^3 - 4x^2 - 3x + 7$$

$$y' = 3x^2 - 8x - 3$$

$$= (3x + 1)(x - 3)$$

増減表を描くと次の通り。

x	...	$-1/3$	...	3	...
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$$\begin{cases} (\text{極大値}) = \frac{203}{27} \quad \left(x = -\frac{1}{3} \text{ のとき} \right) \\ (\text{極小値}) = -11 \quad (x = 3 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (\text{答})$$

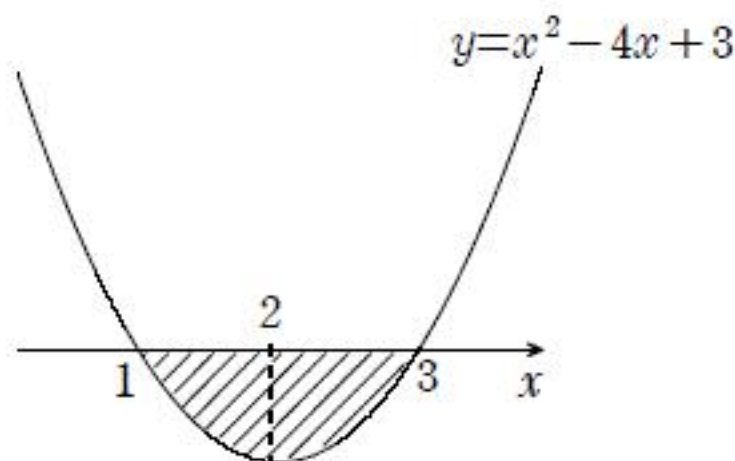
(3) $y = x^2 - 4x + 3$

$$= (x - 2)^2 - 1$$

求める面積を S とする。

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx \\ &= -\int_1^3 (x - 1)(x - 3) dx \\ &= \frac{8}{6} \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3} \quad (\text{答})$$

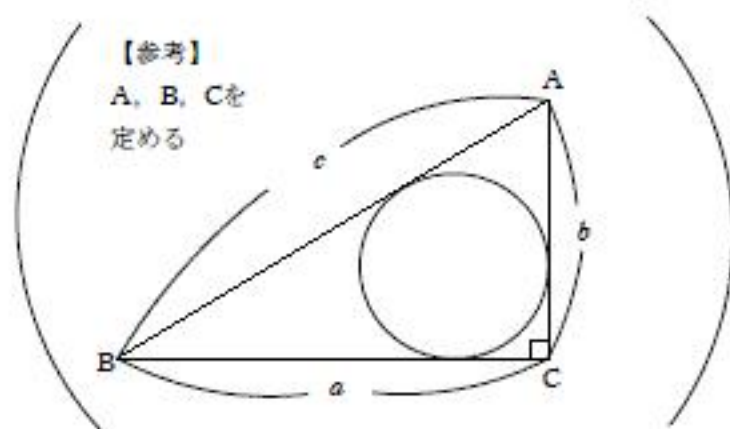


$$(1) a^2 + b^2 = (n^2 - m^2)^2 + (2mn)^2$$

$$= n^4 + 2m^2n^2 + m^4$$

$$= (n^2 + m^2)^2$$

$$= c^2 \quad (\text{証明終})$$



$$(2) \quad \frac{r}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}ab \quad ((1)より \angle C = 90^\circ \text{だから})$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow r &= \frac{2mn(n^2 - m^2)}{(n^2 - m^2) + 2mn + (n^2 + m^2)} \\ &= \frac{2mn(n+m)(n-m)}{2n(n+m)} \end{aligned}$$

$$\therefore \underline{r = m(n-m)} \quad (\text{答})$$

$$(3) \quad r = (\text{素数}) \text{ と (2) の } r = \frac{m(n-m)}{\quad} \text{ より、} \begin{cases} m=1 \\ n-m=r \end{cases} \text{ または } \begin{cases} m=r \\ n-m=1 \end{cases}$$

(正の整数)

$$(i) \quad \begin{cases} m=1 \\ n=r+1 \end{cases} \text{ のとき、} \begin{cases} a = (r+1)^2 - 1^2 \\ \quad = r^2 + 2r \\ b = 2(r+1) \end{cases} \quad \therefore S = r(r+1)(r+2)$$

$$(ii) \quad \begin{cases} m=r \\ n=r+1 \end{cases} \text{ のとき、} \begin{cases} a = (r+1)^2 - r^2 \\ \quad = 2r+1 \\ b = 2r(r+1) \end{cases} \quad \therefore S = r(r+1)(2r+1)$$

$$\text{以上 (i)、(ii) より、} \underline{S = r(r+1)(r+2) \text{ または } r(r+1)(2r+1)} \quad (\text{答})$$

$$(4) \quad \bullet \quad \underline{S = r(r+1)(r+2)} \quad \cdots \cdots 6 \text{ の倍数 (6 で割り切れる)}$$

(連続 3 整数)

$$\begin{aligned} \bullet \quad S &= r(r+1)(2r+1) \\ &= r(r+1)\{(r-1)+(r+2)\} \\ &= \underbrace{(r-1)r(r+1)}_{\text{(連続 3 整数)}} + \underbrace{r(r+1)(r+2)}_{\text{(連続 3 整数)}} \quad \cdots \cdots 6 \text{ の倍数 (6 で割り切れる)} \end{aligned}$$

$$\text{以上より、} S \text{ はいずれにせよ 6 で割り切れる。} \quad (\text{証明終})$$

$$(1) \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}}{2}$$

より、 $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$ (答)

$$\begin{aligned} (2) \quad \overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\ &= 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \quad \text{とする。} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \\ \overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases} \quad \dots\dots \textcircled{1} \text{を示せばよい。}$$

ここで、 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = l (> 0)$ とし、

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + l^2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \cdot \overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{BA} &= 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \\ &= 2(|\overrightarrow{OA}|^2 - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}) \\ &= 2(l^2 - l^2) = 0 \quad (\because \textcircled{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{BC} &= 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\ &= 2(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + l^2 - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}) \\ &= 2(l^2 - l^2) = 0 \quad (\because \textcircled{2}) \end{aligned}$$

よって、 $\textcircled{1}$ は示された (証明終)

