1

(1)　$f(x)=xe^x-x^2-ax$ より，

$$f'(x)=e^x+xe^x-2x-a$$
$$=(x+1)e^x-2x-a$$
$$f'(0)=1-a=-1 \qquad \therefore a=2$$ ……（答）

(2)　(1)より，$f'(x)=(x+1)e^x-2(x+1)=(x+1)(e^x-2)$

増減表を書くと次の通り．

x	$(-\infty)$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$	$(+\infty)$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	極大	↘	極小	↗	

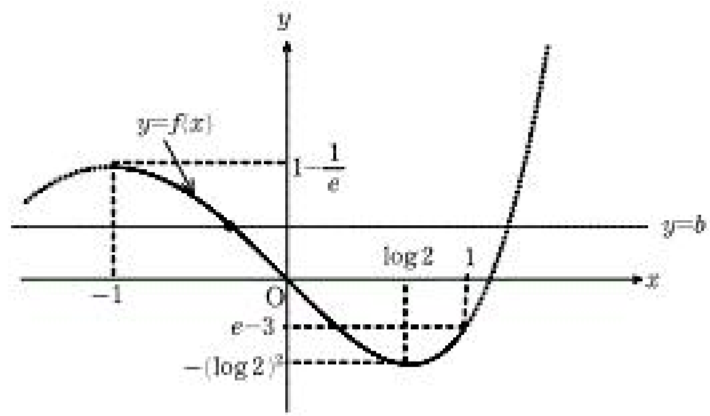
$$\begin{cases}(\text{極大値})=f(-1)=1-\dfrac{1}{e}\\(\text{極小値})=f(\log 2)=-(\log 2)^2\end{cases}$$ ……（答）

(3)　$xe^x=x^2+2x+b \Leftrightarrow \quad xe^x-x^2-2x=b$ ……①

$-1\leq x\leq 1$ での①の異なる実数解の個数を

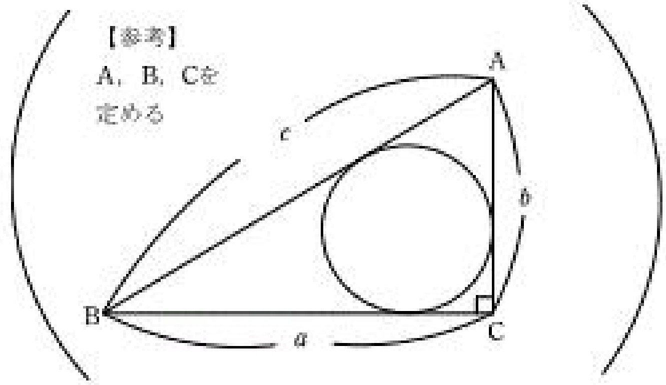
2 関数 $\begin{cases}f(x)=xe^x-x^2-2x\\y=b\end{cases}$ に分解して，共有点の数より調べる．

$$\begin{cases}b>1-\dfrac{1}{e} & \cdots\cdots 0(\text{個})\\1-\dfrac{1}{e}\geq b>e-3 & \cdots\cdots 1(\text{個})\\e-3\geq b>-(\log 2)^2 & \cdots\cdots 2(\text{個})\\b=-(\log 2)^2 & \cdots\cdots 1(\text{個})\\b<-(\log 2)^2 & \cdots\cdots 0(\text{個})\end{cases}$$ ……（答）



2

(1)



$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (n^2-m^2)^2+(2mn)^2 \\ &= n^4+2m^2n^2+m^4 \\ &= (n^2+m^2)^2 \\ &= c^2 \end{aligned}$$

（証明終）

(2)

$$\frac{r}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}ab \qquad ((1)\text{より } \angle C=90^\circ \text{ だから})$$

$$\Leftrightarrow \quad r=\frac{2mn(n^2-m^2)}{(n^2-m^2)+2mn+(n^2+m^2)}$$

$$=\frac{2mn(n+m)(n-m)}{2n(n+m)}$$

$$\therefore r=m(n-m) \qquad \cdots\cdots \text{（答）}$$

(3)

$r=$(素数) と(2)の $r=m(n-m)$ より，$\begin{cases} m=1 \\ n-m=r \end{cases}$ または $\begin{cases} m=r \\ n-m=1 \end{cases}$

（正の整数）

（i）$\begin{cases} m=1 \\ n=r+1 \end{cases}$ のとき，$\begin{cases} a=(r+1)^2-1^2 \\ \quad =r^2+2r \\ b=2(r+1) \end{cases}$ $\quad \therefore S=r(r+1)(r+2)$

（ii）$\begin{cases} m=r \\ n=r+1 \end{cases}$ のとき，$\begin{cases} a=(r+1)^2-r^2 \\ \quad =2r+1 \\ b=2r(r+1) \end{cases}$ $\quad \therefore S=r(r+1)(2r+1)$

以上(i),(ii)より，$S=r(r+1)(r+2)$ または $r(r+1)(2r+1)$ $\qquad\cdots\cdots$（答）

(4)

・$S=\underbrace{r(r+1)(r+2)}_{\text{(連続3整数)}}$ $\quad\cdots\cdots$6の倍数（6で割り切れる）

・$S=r(r+1)(2r+1)$

$$=r(r+1)\{(r-1)+(r+2)\}$$

$$=\underbrace{(r-1)r(r+1)}_{\text{(連続3整数)}}+\underbrace{r(r+1)(r+2)}_{\text{(連続3整数)}} \quad \cdots\cdots \text{6の倍数（6で割り切れる）}$$

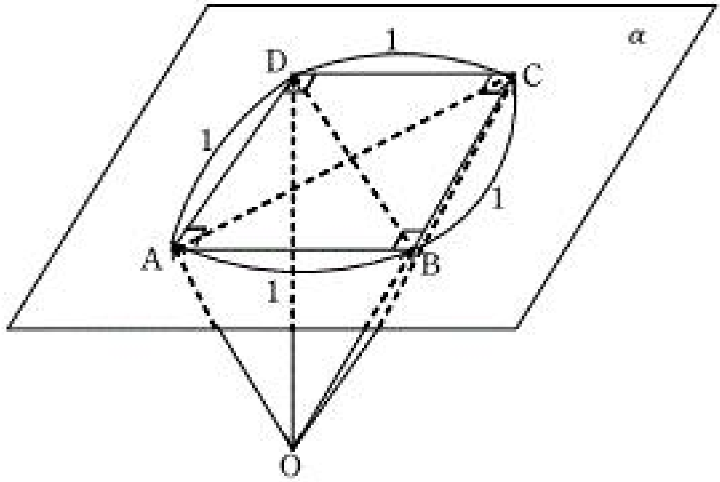
以上より，S はいずれにせよ6で割り切れる．　（証明終）

3

(1)

$$\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}{2}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}}{2}$$

より，$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$ ……（答）



(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)\\&=2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)\end{aligned}$$

とする．

$$\begin{cases}\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{BA}=0\\\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$$ ……① を示せばよい．

ここで，$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=l\,(>0)$ とし，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}&=\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)\\&=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+l^2=0\quad\cdots\cdots②\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cdot\ \overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{BA}&=2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)\\&=2\left(\left|\overrightarrow{OA}\right|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\right)\\&=2\left(l^2-l^2\right)=0\quad(\because ②)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cdot\ \overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{BC}&=2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)\\&=2\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+l^2-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\right)\\&=2\left(l^2-l^2\right)=0\quad(\because ②)\end{aligned}$$

よって，①は示された． （証明終）

4

(1) $A=B$ とする．$(A+B=$(偶数)+(偶数)or(奇数)+(奇数)=(偶数)) ……①

ここで，$A+B=1+2+3+\cdots+2n$

$$=\frac{2n}{2}(2n+1)$$
$$=n(2n+1)$$
$$=(\text{奇数})\cdot(\text{奇数})$$
$$=(\text{奇数})$$

となり，①に矛盾．よって，$A\neq B$ （証明終）

(2) $n=$(偶数)のとき，$n(2n+1)=A+B=$(偶数)より，

$|A-B|=|(A+B)-2B|=|(\text{偶数})-(\text{偶数})|=(\text{偶数})$ （証明終）

(3) $(n=4)$ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 （8 枚のカード）

(合計)$=1+2+3+4+5+6+7+8=36$ より，$A=B=18$ となればよい．

和が 18 となる 4 枚のカードの組を(●,●,●,●)と表す．(ただし,小さい順)

$(1,2,7,8),(1,3,6,8),(1,4,5,8),(2,3,5,8)$
$(1,4,6,7),(2,3,6,7),(2,4,5,7),(3,4,5,6)$

の 8 通りある．

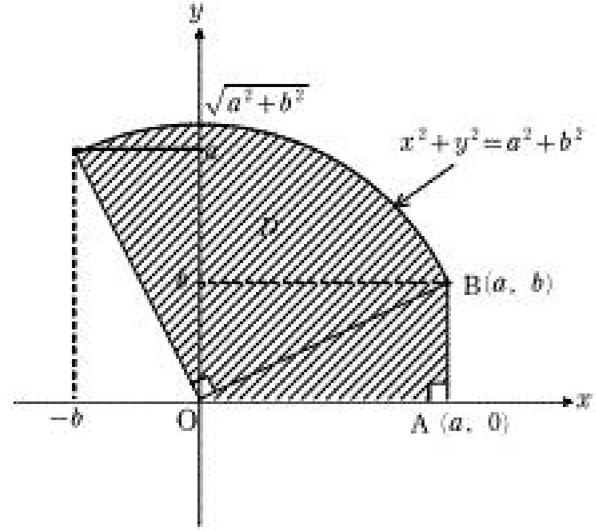
求める確率 P は，

$$P=\frac{8}{{}_8C_4}=\frac{8}{\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}=\underline{\frac{4}{35}}$$ （答）

5

(1) 三角形OABの通過領域は右図の斜線部分.

(ただし,境界を含む)



(2) $$V=\pi\int_{-b}^{a}(a^2+b^2-x^2)\,dx-\frac{1}{3}\pi a^2b$$

$$=\pi\left[(a^2+b^2)x-\frac{x^3}{3}\right]_{-b}^{a}-\frac{\pi}{3}a^2b$$

$$=\pi\left(a^3+ab^2-\frac{a^3}{3}+a^2b+b^3-\frac{b^3}{3}-\frac{a^2b}{3}\right)$$

$$=\underline{\frac{\pi}{3}(2a^3+2a^2b+3ab^2+2b^3)}$$ (答)

(3) $b=1-a$ のとき,

$$V=\frac{\pi}{3}\left\{2a^3+2a^2(1-a)+3a(1-a)^2+2(1-a)^3\right\}$$

$$=\frac{\pi}{3}(a^3+2a^2-3a+2)$$

$$\frac{dV}{da}=\frac{\pi}{3}(3a^2+4a-3)$$

増減表を描くと次の通り.($a+b=1,\ a>0,\ b>0$ より,$0<a<1$)

a	0	$\cdots$	$\frac{-2+\sqrt{13}}{3}$	$\cdots$	-1
$\frac{dV}{da}$		$-$	0	$+$	
V		↘	(最小)	↗	

$$(\text{最小値})=\frac{\pi}{3}\left\{\left(\frac{-2+\sqrt{13}}{3}\right)^3+2\left(\frac{-2+\sqrt{13}}{3}\right)^2-3\cdot\frac{-2+\sqrt{13}}{3}+2\right\}$$

$$=\underline{\frac{124-26\sqrt{13}}{81}\pi\quad\left(a=\frac{-2+\sqrt{13}}{3}\text{ のとき}\right)}$$ (答)