

(平 26 前)

数 学

(理 科 系)

(1 ～ 5 ページ)

- ・ ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点

1. a を実数とし, $f(x) = xe^x - x^2 - ax$ とする. 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(0, f(0))$ における接線の傾きを -1 とする. このとき, 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) a の値を求めよ.

(2) 関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ.

(3) b を実数とすると, 2つの曲線 $y = xe^x$ と $y = x^2 + ax + b$ の $-1 \leq x \leq 1$ の範囲での共有点の個数を調べよ.

2. m, n ($m < n$) を自然数とし,

$$a = n^2 - m^2, \quad b = 2mn, \quad c = n^2 + m^2$$

とおく. 三辺の長さが a, b, c である三角形の内接円の半径を r とし, その三角形の面積を S とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(配点 30 点)

- (1) $a^2 + b^2 = c^2$ を示せ.
- (2) r を m, n を用いて表せ.
- (3) r が素数のときに, S を r を用いて表せ.
- (4) r が素数のときに, S が 6 で割り切れることを示せ.

3. 空間において、原点 O を通らない平面 α 上に一辺の長さ 1 の正方形があり、その頂点を順に A, B, C, D とする。このとき、以下の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) ベクトル $\overrightarrow{OD}$ を、 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ を用いて表せ。

(2) $OA = OB = OC$ のとき、ベクトル

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

が、平面 α と垂直であることを示せ。

4. n を自然数とする. 1 から $2n$ までの番号をつけた $2n$ 枚のカードを袋に入れ, よくかき混ぜて n 枚を取り出し, 取り出した n 枚のカードの数字の合計を A , 残された n 枚のカードの数字の合計を B とする. このとき, 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) n が奇数のとき, A と B が等しくないことを示せ.
- (2) n が偶数のとき, A と B の差は偶数であることを示せ.
- (3) $n = 4$ のとき, A と B が等しい確率を求めよ.

5. a, b を正の実数とし, xy 平面上に 3 点 $O(0, 0)$, $A(a, 0)$, $B(a, b)$ をとる. 三角形 OAB を, 原点 O を中心に 90° 回転するとき, 三角形 OAB が通過してできる図形を D とする. このとき, 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) D を xy 平面上に図示せよ.

(2) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ.

(3) $a + b = 1$ のとき, (2) で求めた V の最小値と, そのときの a の値を求めよ.