1.

(1)　$\mathrm{B}(s, s^2)$，$\mathrm{C}(t, r^2)$ (ただし，$s<t$) を通る直線方程式は，

$$y=\frac{t^2-s^2}{t-s}(x-s)+s^2$$
$$\Longleftrightarrow y=(t+s)x-st$$

これが $\mathrm{A}(1, 2)$ を通るから，

$2=t+s-st$　　すなわち　$\underline{st=t+s-2}$　……①　(答)

(2)　線分 BC の中点が $\mathrm{M}(u, v)$ より，

$$\begin{cases} u=\dfrac{s+t}{2} \\ v=\dfrac{s^2+t^2}{2} \end{cases}\quad \text{すなわち}\quad \begin{cases} s+t=2u \\ st=2u^2-v \end{cases}$$

①へ代入して，　$2u^2-v=2u-2$　すなわち，　$\underline{v=2u^2-2u+2}$　……(答)

(3)　(2)より，　$v=2\left(u-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}$

$u=\dfrac{1}{2}$ のとき，　$v=\dfrac{3}{2}$　となる実数 s，t の存在性を調べる．

$$\begin{cases} s+t=1 \\ st=-1 \end{cases}$$

s と t を 2 解にもつ x の 2 次方程式は，

$x^2-x-1=0$　　すなわち，　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ $\left(s=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

以上より，　$\underline{(v\text{ の最小値})=\dfrac{3}{2},\ u=\dfrac{1}{2},\ s=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$　……(答)

2.

(1)

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}x^2+b_{n+1}x &= \left[\frac{a_n}{2}t^2+b_nt\right]_{c_n}^{x+c_n}\\
&= \frac{a_n}{2}(x+c_n)^2+b_n(x+c_n)-\frac{a_n}{2}{c_n}^2-b_nc_n\\
&= \frac{a_n}{2}x^2+(a_nc_n+b_n)x \qquad \cdots\cdots①
\end{aligned}
$$

①はすべての実数 x で成立するから，

$$
\begin{cases}
a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n & \cdots\cdots②\\
b_{n+1}=a_nc_n+b_n & \cdots\cdots③
\end{cases}
$$

②より， $\underline{a_n=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ (n=1,2,3,\cdots)}$ ……（答）

(2)　③より，

$$
\begin{aligned}
b_{n+1}-b_n &= 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot 3^{n-1}\\
&= 5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(n\geqq 2)\ b_n &= 7+\sum_{k=1}^{n-1}5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}\\
&= 7+\frac{5\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}}{\frac{3}{2}-1}\\
&= 10\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-3\ \ (n=1\text{もみたす})
\end{aligned}
$$

したがって，

$\underline{b_n=10\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-3\ \ (n=1,2,3,\cdots)}$ ……（答）

(3)　③より，

$$
\begin{aligned}
b_{n+1}-b_n &= 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot n\\
&= 5n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(n\geqq 2)\ b_n &= 7+\sum_{k=1}^{n-1}5k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\\
&= 7+5\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}_{T}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rl}
 & T=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+(n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\\
-) & \frac{1}{2}T=\qquad 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+(n-2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+(n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\
\hline
 & \frac{1}{2}T=\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-(n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-(n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\
&= -(n+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2
\end{aligned}
$$

ゆえに， $T=4-(n+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

$$
\begin{aligned}
b_n &= 7+5T\\
&= 7+20-5(n+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\\
&= 27-5(n+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\ \ (n=1\text{もみたす})
\end{aligned}
$$

したがって，

$\underline{b_n=27-5(n+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\ \ (n=1,2,3,\cdots)}$ ……（答）

3.

$1 \leqq a \leqq 7,\ 1 \leqq b \leqq 7,\ 1 \leqq c \leqq 7$

$$\left.\begin{array}{l} \text{長さ}(a, b, c) \\ \text{長さ}\left(\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}\right) \end{array}\right\rangle \text{三角形が成立}$$

(1) $\boxed{a=b>c}\left(\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}\right)$ ……①

$$\begin{cases} 0<c<2a \\ 0<\dfrac{1}{c}<\dfrac{2}{a} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c<2a \\ a<2c \end{cases}$$

ゆえに，　$\dfrac{c}{2}<a<2c$　　①より，　$c<a<2c$

したがって，

$$(a, c)=(3, 2), (4, 3), (5, 3), (5, 4), (6, 4), (7, 4), (6, 5), (7, 5), (7, 6)$$

$$(a, b, c)=(3, 3, 2), (4, 4, 3), (5, 5, 3), (5, 5, 4), (6, 6, 4), (7, 7, 4), (6, 6, 5), (7, 7, 5), (7, 7, 6)$$

9（個）　……（答）

(2) $\boxed{a>b>c}\left(\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}\right)$ ……②

$$\begin{cases} a-b<c<a+b \\ \dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a-b<c<a+b \\ c(a-b)<ab<c(a+b) \end{cases}$$

・$(b=2)$　　②より，$c=1$，$a \geqq 3$

$$\begin{cases} a-2<1<a+2 \\ a-2<2a<a+2 \end{cases}$$

$3 \leqq a \leqq 7$ の a は存在せず不適

・$(b=3)$　　②より，$a>3>c$

$$\begin{cases} a-3<c<a+3 \\ c(a-3)<3a<c(a+3) \end{cases}$$

これをみたすのは，$(a, c)=(4, 2)$

ゆえに，　$(a, b, c)=(4, 3, 2)$

・$(b=4)$　　②より，$a>4>c$

$$\begin{cases} a-4<c<a+4 \\ c(a-4)<4a<c(a+4) \end{cases}$$

これをみたすのは，$(a, c)=(5, 3), (6, 3)$

ゆえに，　$(a, b, c)=(5, 4, 3), (6, 4, 3)$

・$(b=5)$　　②より，$a>5>c$

$$\begin{cases} a-5<c<a+5 \\ c(a-5)<5a<c(a+5) \end{cases}$$

これをみたすのは，$(a, c)=(7, 3), (6, 3), (6, 4), (7, 4)$

ゆえに，　$(a, b, c)=(6, 5, 3), (6, 5, 4), (7, 5, 3), (7, 5, 4)$

・$(b=6)$　　②より，$a>6>c$ より $a=7$

$$\begin{cases} 1<c<13 \\ c<42<13c \end{cases}$$

これをみたすのは，$(a, c)=(7, 4), (7, 5)$

ゆえに，　$(a, b, c)=(7, 6, 4), (7, 6, 5)$

以上より，　$1+2+4+2=9$

よって，　9（個）　……（答）

(3)

・$a=b>c$，$b=c>a$，$c=a>b$　　……$9 \cdot 3=27$（個）

・$a>b=c$，$b>c=a$，$c>a=b$　　……27（個）（上記と同様）

・$a>b>c$，$a>c>b$，$b>a>c$，
$b>c>a$，$c>a>b$，$c>b>a$　　……$9 \cdot 6=54$（個）

・$a=b=c$　　……$(1, 1, 1) \sim (7, 7, 7)$ の 7（個）

$27+27+54+7=115$

よって，　115（個）　……（答）