1.

(1)

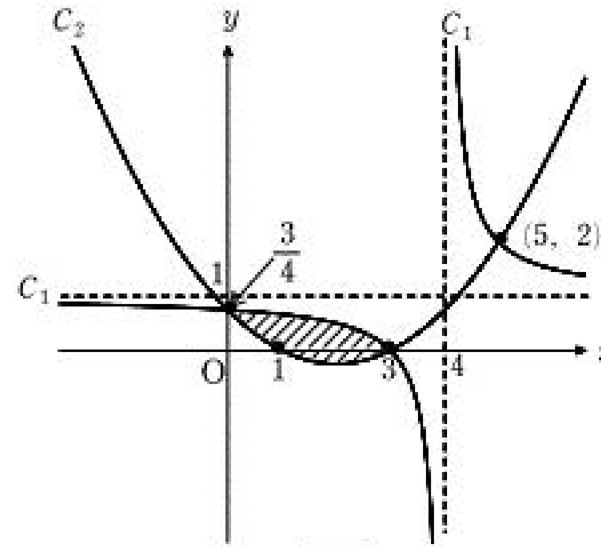


Fig1

$$C_1: y=\frac{x-3}{x-4}=\frac{x-4+1}{x-4}=1+\frac{1}{x-4}$$

$$C_2: y=\frac{1}{4}(x-1)(x-3)=\frac{1}{4}(x-2)^2-\frac{1}{4}$$

$$\frac{x-3}{x-4}=\frac{1}{4}(x-1)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow 4(x-3)=(x-1)(x-3)(x-4) \quad (x\neq 4)$$

$$\Leftrightarrow x(x-3)(x-5)=0 \quad (x\neq 4)$$

よって，　$x=0, 3, 5$

交点座標は，$\left(0, \frac{3}{4}\right), (3, 0), (5, 2)$　　（答）

(2)　(1)を用いて，C_1，C_2 を描くと右上図(Fig.1)の通り．囲まれた面積を S とすると，

$$S=\int_0^3\left\{\frac{x-3}{x-4}-\frac{1}{4}(x-1)(x-3)\right\}dx$$

$$=\int_0^3\left\{1+\frac{1}{x-4}-\frac{1}{4}(x^2-4x+3)\right\}dx$$

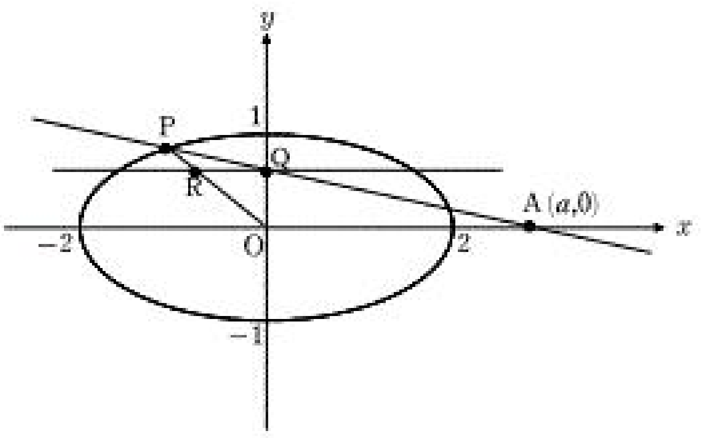
$$=\left[\log|x-4|-\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x\right]_0^3$$

$$=-\frac{27}{12}+\frac{9}{2}+\frac{3}{4}-\log 4$$

$$=3-2\log 2$$　……（答）

2.

(1)　2点 $A(a,0)$ $(a>2)$，$P(2\cos\theta,\sin\theta)$ $(0<\theta<\pi)$



を通る直線の方程式は

$$y=\frac{-\sin\theta}{a-2\cos\theta}(x-a)$$

これより，$Q\left(0,\dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}\right)$

ここで，直線OP の方程式は，

$$y=\frac{\sin\theta}{2\cos\theta}x\quad\left(\text{ただし，}\theta\neq\frac{\pi}{2}\right)$$

より，　$\underline{R\left(\dfrac{2a\cos\theta}{a-2\cos\theta},\dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}\right)}$　……（答）

$\left(\text{これは，}\theta=\dfrac{\pi}{2}\text{ もみたすので，}0<\theta<\pi\right)$

$\underline{\underline{R(0,1)}}$

(2)　$f(\theta)=\dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}$　$(0<\theta<\pi)$

$$f'(\theta)=\frac{a\cos\theta\bullet(a-2\cos\theta)-a\sin\theta\bullet 2\sin\theta}{(a-2\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{a(a\cos\theta-2)}{(a-2\cos\theta)^2}$$

ここで，$\cos\theta=\dfrac{2}{a}$　$\left(0<\dfrac{2}{a}<1\right)$　をみたす実数θはただ1つ存在し，それをα，

つまり，$\cos\alpha=\dfrac{2}{a}$　$\left(\sin\alpha=\sqrt{1-\dfrac{4}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{a^2-4}}{a}\right)$　とおくと，

θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	(π)
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↗	(最大)	↘	

$\theta=\alpha$にて，$f(\theta)$　は最大値をとる．
したがって，

$$(\text{最大値})=f(\alpha)=\frac{a\sin\alpha}{a-2\cos\alpha}=\frac{a\cdot\dfrac{\sqrt{a^2-4}}{a}}{a-2\cdot\dfrac{2}{a}}=\underline{\underline{\frac{a}{\sqrt{a^2-4}}}}\quad\text{……（答）}$$

(3)

$$g(\theta)=\overline{OR}^2=\left(\frac{2a\cos\theta}{a-2\cos\theta}\right)^2+\left(\frac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}\right)^2$$

$$=\frac{a^2(3\cos\theta^2+1)}{(a-2\cos\theta)^2}$$

$t=\cos\theta$ $(-1<t<1)$ とおく

$$=\frac{a^2(3t^2+1)}{(a-2t)^2}$$

$$=G(t)$$

$$G'(t)=\frac{6a^2t\bullet(a-2t)^2-a^2(3t^2+1)\bullet 2(a-2t)\bullet(-2)}{(a-2t)^4}$$

$$=\frac{2a^2(3at+2)}{(a-2t)^3}$$

t	(-1)	$\cdots$	$-\dfrac{2}{3a}$	$\cdots$	(1)
$G'(t)$		$-$	0	$+$	
$G(t)$		↘	(最小)	↗	

したがって，

$$(\text{最小値})=G\left(-\frac{2}{3a}\right)=\underline{\frac{3a^2}{3a^2+4}}\quad\text{……（答）}$$

3.

(1)　$f(x)=x^4-2(a+1)x^3+3ax^2\ (a>0)$　とする．

$f'(x)=4x^3-6(a+1)x^2+6ax$

$f''(x)=12x^2-12(a+1)x+6a$

ここで，$2x^2-2(a+1)x+a=0$ とすると $x=\dfrac{a+1\pm\sqrt{a^2+1}}{2}$

$\left(\alpha=\dfrac{a+1-\sqrt{a^2+1}}{2},\ \beta=\dfrac{a+1+\sqrt{a^2+1}}{2}\right.$ とする．$\left.\right)$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		(変曲点)		(変曲点)	

$\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha)), \mathrm{Q}(\beta, f(\beta))$　としてよく，$\beta-\alpha=\sqrt{2}$　より，

$$\frac{a+1+\sqrt{a^2+1}}{2}-\frac{a+1-\sqrt{a^2+1}}{2}=\sqrt{2}$$

$\Leftrightarrow\ \sqrt{a^2+1}=\sqrt{2}$

これより，$\underline{a=1}$　……（答）

(別解)

解と係数の関係により，

$$\begin{cases}\alpha+\beta=a+1\\ \alpha\beta=\dfrac{a}{2}\end{cases}$$

増減表より，$x=\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ で変曲点をもつ．

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\left(\sqrt{2}\right)^2$$

$\Leftrightarrow\ (a+1)^2-4\cdot\dfrac{a}{2}=2$

$\Leftrightarrow\ a^2=1$　　$\therefore\ \underline{a=1}\ (>0)$

(2)　2点　P, Q の中点を $\mathrm{M}(x, y)$ とする．

$$\mathrm{P}\Bigl(\underbrace{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\alpha}, f(\alpha)\Bigr), \mathrm{Q}\Bigl(\underbrace{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\beta}, f(\beta)\Bigr)$$

ここで，

$f(x)=x^4-4x^3+3x^2$

$f'(x)=4x^3-12x^2+6x$

$f''(x)=12x^2-24x+6$

より，　$f(x)=\dfrac{1}{12}f''(x)\left(x^2-2x-\dfrac{3}{2}\right)-2x+\dfrac{3}{4}$　だから

$$\begin{cases}f(\alpha)=-2\alpha+\dfrac{3}{4}=-\dfrac{5}{4}+\sqrt{2}\\ f(\beta)=-2\beta+\dfrac{3}{4}=-\dfrac{5}{4}-\sqrt{2}\end{cases}$$

したがって，

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{P}\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{5}{4}+\sqrt{2}\right)\\ \mathrm{Q}\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{5}{4}-\sqrt{2}\right)\end{array}\right\rangle \text{中点}\left(1, -\frac{5}{4}\right)$$

これより，$\mathrm{R}(1, 0)$

よって，　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\bullet\left(0+\dfrac{5}{4}\right)\bullet\sqrt{2}=\underline{\dfrac{5\sqrt{2}}{8}}$　　……（答）

(3)　点 $\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha))$　での接線を l_{P}，点 $\mathrm{Q}(\beta, f(\beta))$　での接線を l_{Q} とすると，

$$\begin{aligned}l_{\mathrm{P}}: y&=(4\alpha^3-12\alpha^2+6\alpha)(x-\alpha)+\alpha^4-4\alpha^3+3\alpha^2\\ &=(4\alpha^3-12\alpha^2+6\alpha)x-3\alpha^4+8\alpha^3-3\alpha^2\end{aligned}$$

ここで，

$x^4-4x^3+3x^2=(4\alpha^3-12\alpha^2+6\alpha)x-3\alpha^4+8\alpha^3-3\alpha^2$

$\Leftrightarrow\ (x-\alpha)^2\{x^2+(2\alpha-4)x+3\alpha^2-8\alpha+3\}=0$

$\Leftrightarrow\ (x-\alpha)^3\{x+3\alpha-4\}=0\ (2\alpha^2-4\alpha+1=0$ より$)$

点 $\mathrm{P}'_x=4-3\alpha$，同様に，点 $\mathrm{Q}'_x=4-3\beta$

これより，

$$\frac{\mathrm{P}'_x+\mathrm{Q}'_x}{2}=\frac{8-3(\alpha+\beta)}{2}=\frac{2}{2}=\underline{1}$$　……（答）

4.

(1)

$$\frac{2ak+6b}{k(k+1)(k+3)}=\frac{p}{k}+\frac{q}{k+1}+\frac{r}{k+3}$$
$$=\frac{(p+q+r)k^2+(4p+3q+r)k+3p}{k(k+1)(k+3)} \leftarrow \left(\text{すべての自然数 } k \text{ で成立}\right)$$

ゆえに $\begin{cases} p+q+r=0 \\ 4p+3q+r=2a \\ 3p=6b \end{cases}$ したがって $\underline{\begin{cases} p=2b \\ q=a-3b \\ r=-a+b \end{cases}}$ ……(答)

(2) $(b=0\text{ のとき})$ $x_k=\frac{a}{k+1}+\frac{-a}{k+3}=a\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$

$$\sum_{k=1}^{n}x_k=a\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right) \leftarrow (n\geqq 3)$$
$$=a\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$
$$=a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=\underline{\frac{an(5n+13)}{6(n+2)(n+3)}} \quad \text{……(答)}$$

$(a=0\text{ のとき})$

$$x_k=\frac{2b}{k}+\frac{-3b}{k+1}+\frac{b}{k+3}$$
$$=b\left\{2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)\right\}$$

$$\sum_{k=1}^{n}x_k=2b\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-b\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right) \leftarrow (n\geqq 4)$$
$$=2b\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-b\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=\underline{\frac{bn(7n^2+42n+59)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}} \quad \text{……(答)}$$

(3)

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_k=\lim_{n\to\infty}\left(\underset{(b=0)}{\underline{\underline{\sum_{k=1}^{n}x_k}}}+\underset{(a=0)}{\underline{\underline{\sum_{k=1}^{n}x_k}}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{an(5n+13)}{6(n+2)(n+3)}+\frac{bn(7n^2+42n+59)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}$$
$$=\frac{5}{6}a+\frac{7}{6}b=\underline{\frac{1}{6}(5a+7b)} \quad \text{……(答)}$$

5.

$1 \le a \le 7,\ 1 \le b \le 7,\ 1 \le c \le 7$

$\left.\begin{array}{l} \text{長さ}(a, b, c) \\ \text{長さ}\left(\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}\right) \end{array}\right\rangle$ 三角形が成立

(1) $\boxed{a=b>c}\left(\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}\right)$ ……①

$$\begin{cases} 0<c<2a \\ 0<\dfrac{1}{c}<\dfrac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c<2a \\ a<2c \end{cases}$$

ゆえに，$\dfrac{c}{2}<a<2c$　①より，$\underline{\underline{c<a<2c}}$

したがって，

$$(a, c)=(3,2),(4,3),(5,3),(5,4),(6,4),$$
$$(7,4),(6,5),(7,5),(7,6)$$

$$(a, b, c)=(3,3,2),(4,4,3),(5,5,3),(5,5,4),(6,6,4),$$
$$(7,7,4),(6,6,5),(7,7,5),(7,7,6)$$

<u>9（個）</u>　……（答）

(2) $\boxed{a>b>c}\left(\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}\right)$ ……②

$$\begin{cases} a-b<c<a+b \\ \dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b<c<a+b \\ c(a-b)<ab<c(a+b) \end{cases}$$

・$(b=2)$　②より，$c=1$，$a \ge 3$

$$\begin{cases} a-2<1<a+2 \\ a-2<2a<a+2 \end{cases}$$

$3 \le a \le 7$ の a は存在せず不適

・$(b=3)$　②より，$a>3>c$

$$\begin{cases} a-3<c<a+3 \\ c(a-3)<3a<c(a+3) \end{cases}$$

これをみたすのは，$(a, c)=(4,2)$

ゆえに，$(a, b, c)=(4,3,2)$

・$(b=4)$　②より，$a>4>c$

$$\begin{cases} a-4<c<a+4 \\ c(a-4)<4a<c(a+4) \end{cases}$$

これをみたすのは，$(a, c)=(5,3),(6,3)$

ゆえに，$(a, b, c)=(5,4,3),(6,4,3)$

・$(b=5)$　②より，$a>5>c$

$$\begin{cases} a-5<c<a+5 \\ c(a-5)<5a<c(a+5) \end{cases}$$

これをみたすのは，$(a, c)=(6,3),(6,4),(7,3),(7,4)$

ゆえに，$(a, b, c)=(6,5,3),(6,5,4),(7,5,3),(7,5,4)$

・$(b=6)$　②より，$a>6>c$ より $a=7$

$$\begin{cases} 1<c<13 \\ c<42<13c \end{cases}$$

これをみたすのは，$(a, c)=(7,4),(7,5)$

ゆえに，$(a, b, c)=(7,6,4),(7,6,5)$

以上より，$1+2+4+2=9$

よって，<u>9（個）</u>　……（答）

(3)

・$a=b>c$，$b=c>a$，$c=a>b$　……$9 \cdot 3=27$（個）

・$a>b=c$，$b>c=a$，$c>a=b$　……27（個）（上記と同様）

・$a>b>c$，$a>c>b$，$b>a>c$，

$b>c>a$，$c>a>b$，$c>b>a$　……$9 \cdot 6=54$（個）

・$a=b=c$　……$(1,1,1) \sim (7,7,7)$ の 7（個）

$27+27+54+7=115$

よって，<u>115（個）</u>　……（答）