

(平 27 前)

数 学

(理 科 系)

(1 ～ 5 ページ)

- ・ ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点

1. 座標平面上の 2 つの曲線 $y = \frac{x-3}{x-4}$, $y = \frac{1}{4}(x-1)(x-3)$ をそれぞれ C_1 , C_2 とする. 以下の間に答えよ. (配点 30 点)

- (1) 2 曲線 C_1 , C_2 の交点をすべて求めよ.
- (2) 2 曲線 C_1 , C_2 の概形をかき, C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ.

2. 座標平面上の楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を C とする. $a > 2, 0 < \theta < \pi$ とし, x 軸上の点 $A(a, 0)$ と楕円 C 上の点 $P(2 \cos \theta, \sin \theta)$ をとる. 原点を O とし, 直線 AP と y 軸との交点を Q とする. 点 Q を通り x 軸に平行な直線と, 直線 OP との交点を R とする. 以下の間に答えよ. (配点 30 点)

- (1) 点 R の座標を求めよ.
- (2) (1) で求めた点 R の y 座標を $f(\theta)$ とする. このとき,
 $0 < \theta < \pi$ における $f(\theta)$ の最大値を求めよ.
- (3) 原点 O と点 R の距離の 2 乗を $g(\theta)$ とする. このとき,
 $0 < \theta < \pi$ における $g(\theta)$ の最小値を求めよ.

3. a を正の実数とする. 座標平面上の曲線 C を

$$y = x^4 - 2(a+1)x^3 + 3ax^2$$

で定める. 曲線 C が 2 つの変曲点 P, Q をもち, それらの x 座標の差が $\sqrt{2}$ であるとする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) a の値を求めよ.
- (2) 線分 PQ の中点と x 座標が一致するような, C 上の点を R とする. 三角形 PQR の面積を求めよ.
- (3) 曲線 C 上の点 P における接線が P 以外で C と交わる点を P' とし, 点 Q における接線が Q 以外で C と交わる点を Q' とする. 線分 $P'Q'$ の中点の x 座標を求めよ.

4. a, b を実数とし, 自然数 k に対して $x_k = \frac{2ak + 6b}{k(k+1)(k+3)}$ とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) $x_k = \frac{p}{k} + \frac{q}{k+1} + \frac{r}{k+3}$ がすべての自然数 k について成り立つような実数 p, q, r を, a, b を用いて表せ.

(2) $b = 0$ のとき, 3 以上の自然数 n に対して $\sum_{k=1}^n x_k$ を求めよ.

また, $a = 0$ のとき, 4 以上の自然数 n に対して $\sum_{k=1}^n x_k$ を求めよ.

(3) 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ の和を求めよ.

5. a, b, c を 1 以上 7 以下の自然数とする. 次の条件 (*) を考える.

(*) 3 辺の長さが a, b, c である三角形と, 3 辺の長さが $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ である三角形が両方とも存在する.

以下の間に答えよ. (配点 30 点)

- (1) $a = b > c$ であり, かつ条件 (*) をみたす a, b, c の組の個数を求めよ.
- (2) $a > b > c$ であり, かつ条件 (*) をみたす a, b, c の組の個数を求めよ.
- (3) 条件 (*) をみたす a, b, c の組の個数を求めよ.