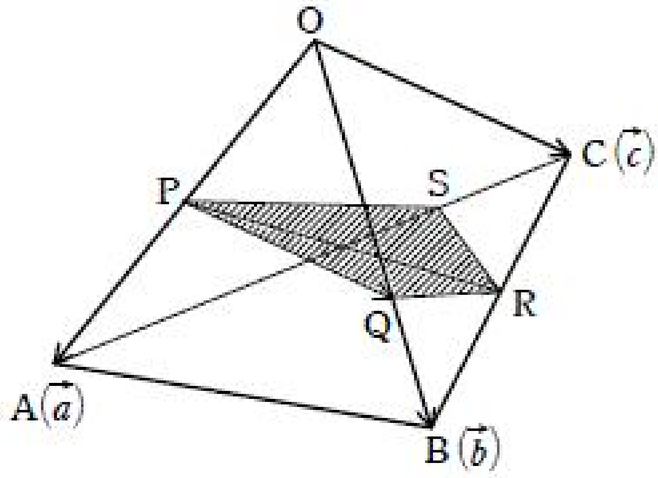
1.

(1)



$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$$
$$=\underline{\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}}\ \cdots\cdots(答)$$

$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}$$
$$=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{1}{2}\vec{a}$$
$$=\underline{\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}\right)}\ \cdots\cdots(答)$$

(2)

$$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OP}+x\overrightarrow{PQ}+y\overrightarrow{PR}\quad(x,y:実数)$$
$$=\frac{1}{2}\vec{a}+x\left(\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)+y\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)$$
$$=\frac{1-x-y}{2}\vec{a}+\underbrace{\left(\frac{2x}{3}+\frac{y}{2}\right)}_{0}\vec{b}+\frac{y}{2}\vec{c}$$

点Sは辺AC上にあるので,

$$\begin{cases}\dfrac{2x}{3}+\dfrac{y}{2}=0\\[2mm]\dfrac{1-x-y}{2}+\dfrac{y}{2}=1\end{cases}\qquad\therefore\ \underline{\underline{x=-1,\ y=\frac{4}{3}}}$$

$$\therefore\overrightarrow{OS}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OC}}{2+1}$$

より,

$$\underline{\left|\overrightarrow{AS}\right|:\left|\overrightarrow{SC}\right|=2:1}\ \cdots\cdots(答)$$

(3)

$$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=1,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}\ \cdots\cdots①$$

となる.

$$\overrightarrow{QS}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{b}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+2\vec{c}-2\vec{b}\right)$$

より,

$$\left|\overrightarrow{QS}\right|^2=\frac{1}{9}\left(1+4+4+4\cdot\frac{1}{2}-8\cdot\frac{1}{2}-4\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{9}\quad(\because①)$$

$$\therefore\underline{\left|\overrightarrow{QS}\right|=\frac{\sqrt{5}}{3}}\ \cdots\cdots(答)$$

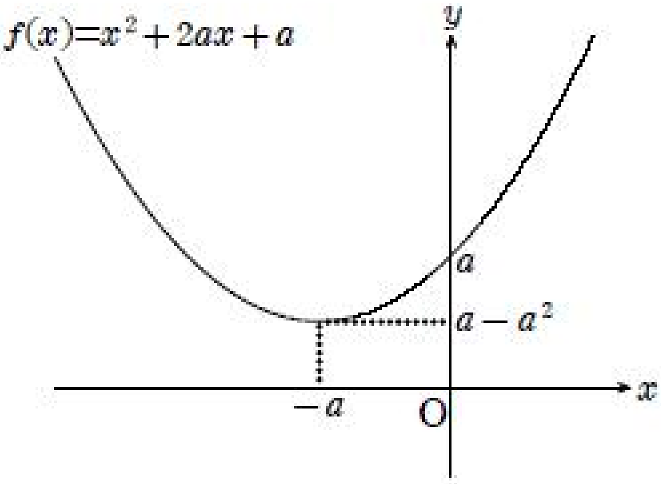
2.

(1)

○ $(0<a\leqq 1)$

$$f(x)=\left|x^2+2ax+a\right|$$
$$=x^2+2ax+a$$
$$=(x+a)^2+a-a^2$$

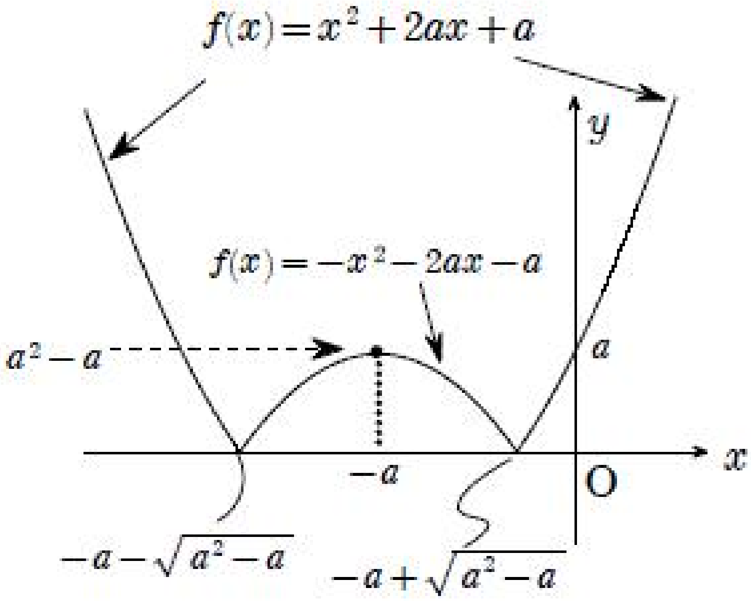
$y=f(x)$ のグラフを描くと右図の通り。



○ $(a\geqq 1)$

$$f(x)=\left|x^2+2ax+a\right|$$
$$=\begin{cases} x^2+2ax+a=(x+a)^2+a-a^2 & \left(x\leqq -a-\sqrt{a^2-a},\ -a+\sqrt{a^2-a}\leqq x\right) \\ -x^2-2ax-a=-(x+a)^2+a^2-a & \left(-a-\sqrt{a^2-a}\leqq x\leqq -a+\sqrt{a^2-a}\right) \end{cases}$$

$y=f(x)$ のグラフを描くと右図の通り．

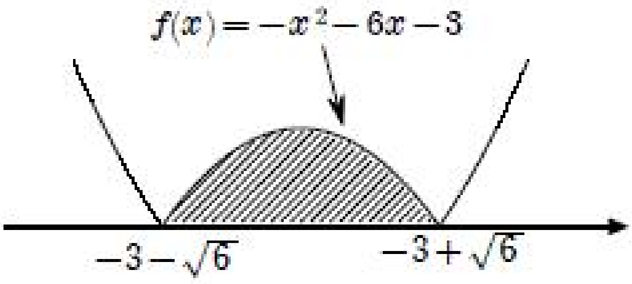


(2)

$$f(-1)=|1-2a+a|$$
$$=|1-a|=2$$
$$\Longleftrightarrow 1-a=\pm 2\ \ (a=-1,3)$$

$a>0$ より，$\underline{a=3}$（答）

求める図形の面積を S とおくと，



$$S=\int_{-3-\sqrt{6}}^{-3+\sqrt{6}}\left(-x^2-6x-3\right)dx$$
$$=\frac{1}{6}\cdot\left(2\sqrt{6}\right)^3=\underline{8\sqrt{6}}\ \text{（答）}$$

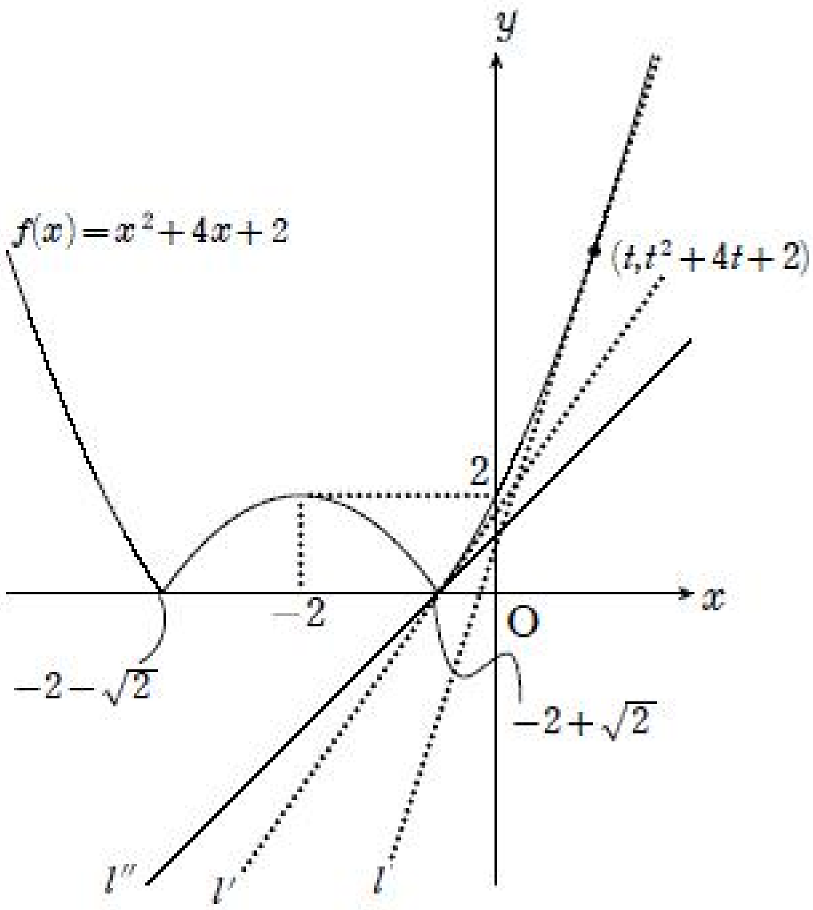
(3)　$f(x)=x^2+4x+2$ 上の点 $\left(t,\ t^2+4t+2\right)$ での接線で，傾きが m を調べると

$$m=f'(t)=2t+4$$
$$(\text{右図の}l'\text{の傾き})=m'=2\sqrt{2}>2$$

$\left(-2+\sqrt{2},\ 0\right)$ を通り，傾き 2 の直線方程式は，

$$y=2x+\underbrace{\underline{4-2\sqrt{2}}}_{(y\text{ 切片})}$$

$$\therefore\ \underline{b\leqq 4-2\sqrt{2}}\ \text{（答）}$$



3.

(1)　$ab \geqq cd + 25 > 25$ より，$(a, b) = (5, 6), (6, 5), (6, 6)$ で調べればよい。

(i)　$(a, b) = (5, 6)$ のとき，$5 \geqq cd$ より，

$$\left.\begin{array}{l}(c, d) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), \\ \qquad\quad (2, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 1), (5, 1)\end{array}\right\} 10\text{通り}$$

(ii)　$(a, b) = (6, 5)$ のとき，上記の(i)と同じ 10 通り

(iii)　$(a, b) = (6, 6)$ のとき，$11 \geqq cd$ より，

$$\left.\begin{array}{l}(c, d) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ \qquad\quad (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), \\ \qquad\quad (3, 1), (3, 2), (3, 3), \\ \qquad\quad (4, 1), (4, 2), \\ \qquad\quad (5, 1), (5, 2), \\ \qquad\quad (6, 1)\end{array}\right\} 19\text{通り}$$

$$P(ab \geqq cd + 25) = \frac{10 + 10 + 19}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = \underline{\frac{13}{432}} \quad (\text{答})$$

(2)　$ab = cd = k \quad (1 \leqq k \leqq 36)$

$$\left.\begin{array}{ll}(k=1) \cdots\cdots 1\text{ 通り} & (k=12) \cdots\cdots 16\text{ 通り} \\ (k=2) \cdots\cdots 4\text{ 通り} & (k=15) \cdots\cdots 4\text{ 通り} \\ (k=3) \cdots\cdots 4\text{ 通り} & (k=16) \cdots\cdots 1\text{ 通り} \\ (k=4) \cdots\cdots 9\text{ 通り} & (k=18) \cdots\cdots 4\text{ 通り} \\ (k=5) \cdots\cdots 4\text{ 通り} & (k=20) \cdots\cdots 4\text{ 通り} \\ (k=6) \cdots\cdots 16\text{ 通り} & (k=24) \cdots\cdots 4\text{ 通り} \\ (k=8) \cdots\cdots 4\text{ 通り} & (k=25) \cdots\cdots 1\text{ 通り} \\ (k=9) \cdots\cdots 1\text{ 通り} & (k=30) \cdots\cdots 4\text{ 通り} \\ (k=10) \cdots\cdots 4\text{ 通り} & (k=36) \cdots\cdots 1\text{ 通り}\end{array}\right\} 86\text{通り}$$

$$\therefore\ P(ab = cd) = \frac{86}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = \underline{\frac{43}{648}} \quad (\text{答})$$