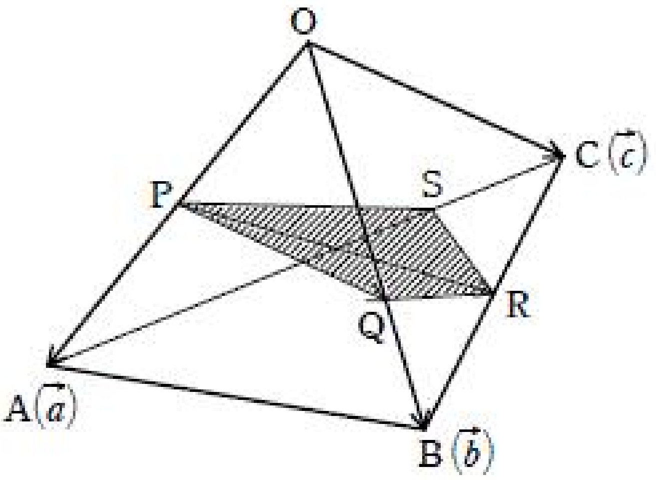
1.

(1)



$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$$

$$=\underline{\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}}\ \cdots\cdots(答)$$

$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}$$

$$=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{1}{2}\vec{a}$$

$$=\underline{\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}\right)}\ \cdots\cdots(答)$$

(2)

$$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OP}+x\overrightarrow{PQ}+y\overrightarrow{PR}\quad (x,\ y:実数)$$

$$=\frac{1}{2}\vec{a}+x\left(\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)+y\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)$$

$$=\frac{1-x-y}{2}\vec{a}+\underbrace{\left(\frac{2x}{3}+\frac{y}{2}\right)}_{0}\vec{b}+\frac{y}{2}\vec{c}$$

点 S は辺 AC 上にあるので，

$$\begin{cases}\dfrac{2x}{3}+\dfrac{y}{2}=0\\[2mm] \dfrac{1-x-y}{2}+\dfrac{y}{2}=1\end{cases}\qquad \therefore \underline{\underline{x=-1,\ y=\frac{4}{3}}}$$

$$\therefore \overrightarrow{OS}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OC}}{2+1}$$

より，

$$\underline{\left|\overrightarrow{AS}\right|:\left|\overrightarrow{SC}\right|=2:1}\ \cdots\cdots(答)$$

(3)

$$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=1,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}\ \cdots\cdots①$$

となる．

$$\overrightarrow{QS}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{b}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+2\vec{c}-2\vec{b}\right)$$

より，

$$\overrightarrow{QS}=\frac{1}{9}\left(1+4+4+4\cdot\frac{1}{2}-8\cdot\frac{1}{2}-4\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{9}\quad(\because ①)$$

$$\therefore \underline{\left|\overrightarrow{QS}\right|=\frac{\sqrt{5}}{3}}\ \cdots\cdots(答)$$

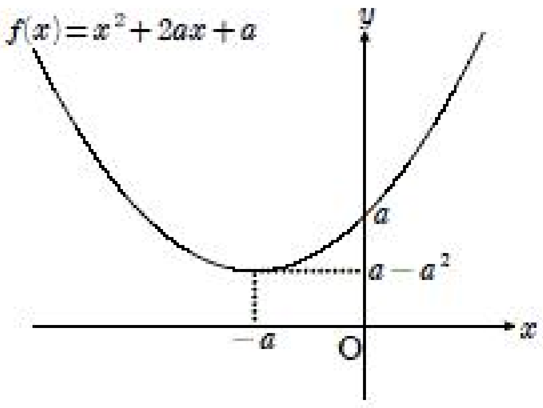
2.

(1)

○ $(0<a\leqq 1)$

$$f(x)=\left|x^2+2ax+a\right|$$
$$=x^2+2ax+a$$
$$=(x+a)^2+a-a^2$$

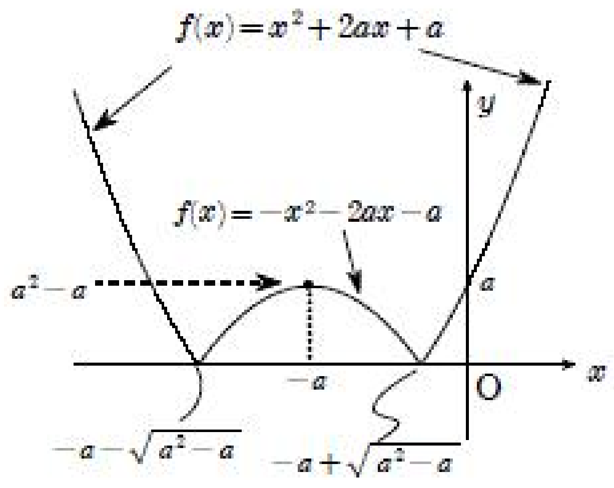
$y=f(x)$ のグラフを描くと右図の通り。



○ $(a\geqq 1)$

$$f(x)=\left|x^2+2ax+a\right|$$
$$=\begin{cases} x^2+2ax+a=(x+a)^2+a-a^2 & \left(x\leqq -a-\sqrt{a^2-a},\ -a+\sqrt{a^2-a}\leqq x\right) \\ -x^2-2ax-a=-(x+a)^2+a^2-a & \left(-a-\sqrt{a^2-a}\leqq x\leqq -a+\sqrt{a^2-a}\right) \end{cases}$$

$y=f(x)$ のグラフを描くと右図の通り．



(2) $f(x)=x^2+4x+2$ 上の点$\left(t,\ t^2+4t+2\right)$での接線で，傾き m を調べると

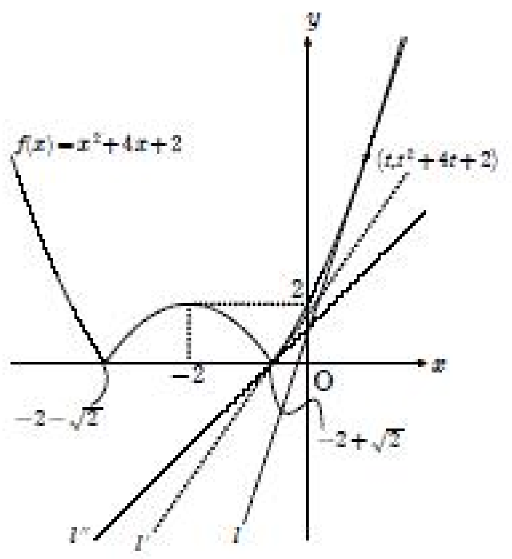
$m=f'(t)=2t+4$

(右図のl'の傾き)$=m'=2\sqrt{2}>2$

$\left(-2+\sqrt{2},\ 0\right)$を通り，傾き 2 の(直線)$l''$ 方程式は

$l'':y=2x+4-2\sqrt{2}$

$\therefore \underline{b\leqq 4-2\sqrt{2}}$ (答)



(3)

○ $(0<a\leqq 1)$

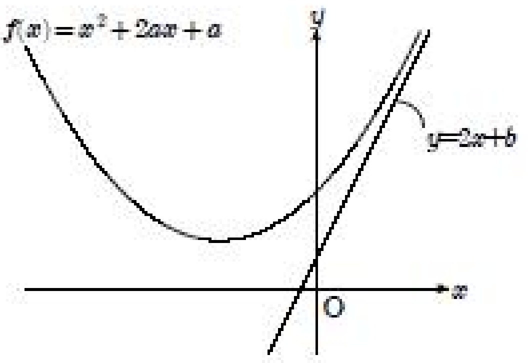
$x^2+2ax+a=2x+b$

$\Longleftrightarrow x^2+2(a-1)x+a-b=0$

$\dfrac{D}{4}=(a-1)^2-(a-b)\leqq 0$

$\therefore b\leqq -(a-1)^2+a$

$\underline{\underline{(b\leqq -a^2+3a-1)}}$



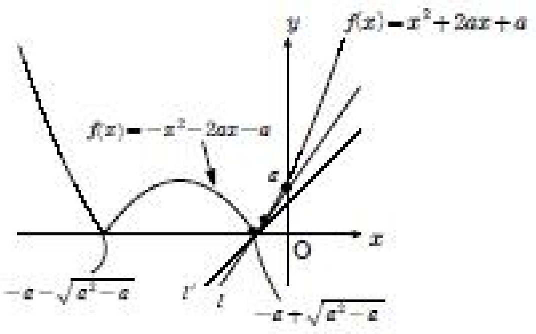
○ $\left(1\leqq a\leqq \dfrac{3}{2}\right)$

$f(x)=x^2+2ax+a$ 上の点$(t,\ t^2+2at+a)$での接線で，傾き m を調べると

$m=f'(t)=2t+2a$

(右図の l' の傾き)$=2\sqrt{a^2-a}<2$

$\left(\because 1\leqq a\leqq \dfrac{3}{2}\text{において，}0\leqq a^2-a\leqq \dfrac{3}{4}\right)$



$f(x)=x^2+2ax+a$ と $y=2x+b$ が接する場合を調べればよい．

$x^2+2ax+a=2x+b$

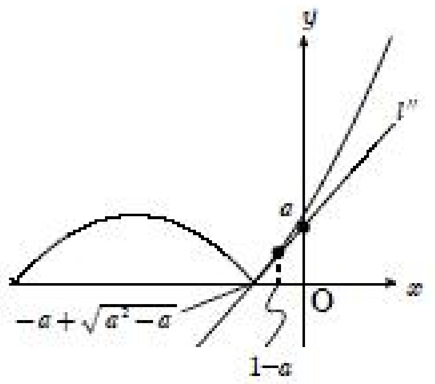
$\Longleftrightarrow x^2+2(a-1)x+a-b=0$

$\dfrac{D}{4}=(a-1)^2-(a-b)=0$ $(b=-a^2+3a-1)$

接線の x 座標は$x=1-a$

$l'':y=2(x-1+a)+(1-a)^2+2a(1-a)+a$

$\Longleftrightarrow y=2x-a^2+3a-1$ $\underline{\underline{(b\leqq -a^2+3a-1)}}$

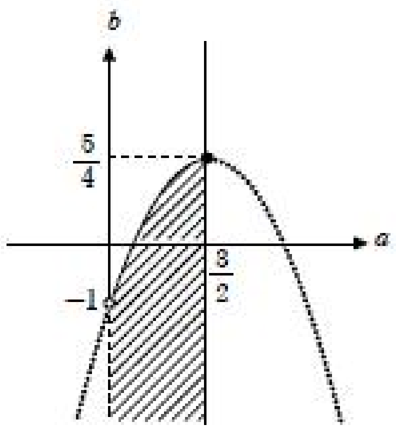


以上より，

$$b\leqq -a^2+3a-1\ \left(b\leqq -\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\right)$$

$\left(0<a\leqq \dfrac{3}{2}\right)$を図示すると，右図の通り．

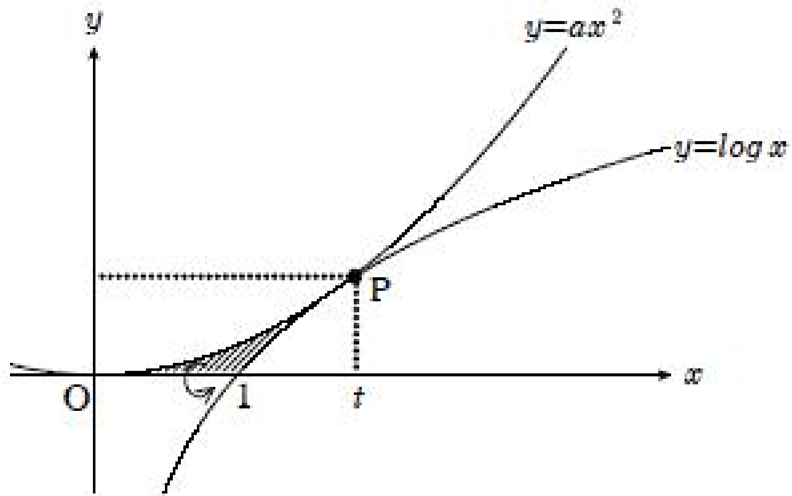
(実線は境界を含み，破線は境界を含まず)



3.

(1)　接点 P の x 座標を $t(>0)$ をおく。

$$\begin{cases} \log t = at^2 & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{1}{t} = 2at & \cdots\cdots ② \end{cases}$$



②より，$at^2 = \dfrac{1}{2}$

これを①へ代入する。

$$\log t = \frac{1}{2} \iff t = \sqrt{e}$$

$$\therefore \underline{P\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2}\right), a = \frac{1}{2e}}$$ （答）

(2)

$$V = \pi\int_0^{\sqrt{e}} \frac{1}{4e^2}x^4 dx - \pi\int_1^{\sqrt{e}} (\log x)^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{4e^2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt{e}} - \pi\left[x(\log x)^2\right]_1^{\sqrt{e}} + \pi\int_1^{\sqrt{e}} x \cdot 2\log x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{\pi e^2\sqrt{e}}{20e^2} - \pi\sqrt{e}\cdot\frac{1}{4} + 2\pi\left[x\log x - x\right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{e}}{20} - \frac{\pi\sqrt{e}}{4} + 2\pi\left(\frac{\sqrt{e}}{2} - \sqrt{e} + 1\right)$$

$$= \underline{\left(2 - \frac{6}{5}\sqrt{e}\right)\pi}$$ （答）

4.

(1)(i)

$$\begin{cases} a=18=2\cdot3^2 \\ b=30=2\cdot3\cdot5 \\ c=-42=-2\cdot3\cdot7 \end{cases}$$

$>\underline{S=\{1,2,3,6,-1,-2,-3,-6\}}$ ……(答)

$>\underline{T=\{1,2,3,6,-1,-2,-3,-6\}}$ ……(答)

(ii)　$a=pb+c$ （a,b,c,p は 0 以外の整数）

○a と b の公約数を m とおく。

$$\begin{cases} a=ma' \\ b=mb' \end{cases} \quad (a', b' \text{は整数})$$

$c=ma'-pmb'=m(a'-pb')$　← m は c の約数

つまり，a と b の公約数 m は c の約数

$\therefore M\leqq N$ ……①

○b と c の公約数を n とおく。

$$\begin{cases} b=nb'' \\ c=nc'' \end{cases} \quad (b'', c'' \text{は整数})$$

$a=pnb''+nc''=n(pb''+c'')$　← n は a の約数

つまり，b と c の公約数 n は a の約数

$\therefore N\leqq M$ ……②

以上①，②より，$M=N$　（証明終）

(2)　2 つの自然数 a と b の最大公約数を$(a,\ b)$で表す。

$a_{n+2}=6a_{n+1}+a_n$ （$a_1=3,\ a_2=4$）より，帰納的に a_n は自然数

(i)　$(a_{n+2},a_{n+1})=(a_{n+1},a_n)$ なので，

$$\begin{aligned}(a_{n+1},a_n)&=(a_2,a_1)\\&=(4,3)\\&=\underline{1}\end{aligned}$$ ……(答)

(ii)

$$\begin{aligned}a_{n+4}&=6a_{n+3}+a_{n+2}\\&=6(6a_{n+2}+a_{n+1})+a_{n+2}\\&=37a_{n+2}+a_{n+2}-a_n\\&=\underline{38a_{n+2}-a_n}\end{aligned}$$ ……(答)

(iii)

○ n が奇数のとき

$$\begin{aligned}(a_{n+2},a_n)&=(a_3,a_1)\\&=(27,3)\\&=3\end{aligned}$$

$(a_3=6\cdot4+3=27)$

○ n が偶数のとき

$$\begin{aligned}(a_{n+2},a_n)&=(a_4,a_2)\\&=(166,4)\\&=2\end{aligned}$$

$(a_4=6\cdot27+4=166)$

以上まとめて，

$$(a_{n+2},a_n)=\begin{cases}3 & (n\text{が奇数})\\ 2 & (n\text{が偶数})\end{cases}$$ ……(答)

5.

(1)

$$\begin{cases} x=(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y=(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases} \quad (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

$$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\cos\theta+(1+\cos\theta)(-\sin\theta)$$

$$=-\sin\theta(2\cos\theta+1) \qquad \leftarrow \frac{dx}{d\theta}=0$$

$$\therefore \theta=0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ 2\pi$$

$$\therefore \underline{(2,\ 0),\ \left(-\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right),\ (0,\ 0),\ \left(-\frac{1}{4},\ -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)} \ \cdots\cdots(\text{答})$$

$$\frac{dy}{d\theta}=-\sin^2\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta$$

$$=2\cos^2\theta+\cos\theta-1$$

$$=(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1) \qquad \leftarrow \frac{dy}{d\theta}=0$$

$$\therefore \theta=\frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi$$

$$\therefore \underline{\left(\frac{3}{4},\ \frac{3\sqrt{3}}{4}\right),\ (0,\ 0),\ \left(\frac{3}{4},\ -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)} \ \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)}{-\sin\theta(2\cos\theta+1)}$$

よって,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin^2\theta(2\sin\theta-1)}{-\sin\theta(1-\cos\theta)(2\cos\theta+1)}$$

$$=\frac{\sin\theta(1-2\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(2\cos\theta+1)}$$

$$\therefore \underline{\lim_{\theta\to\pi}\frac{dy}{dx}=0} \ \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) $x=x(\theta),\ y=y(\theta)$ とおくと,

$$\begin{cases} x(2\pi-\theta)=x(\theta) \\ y(2\pi-\theta)=y(\theta) \end{cases}$$

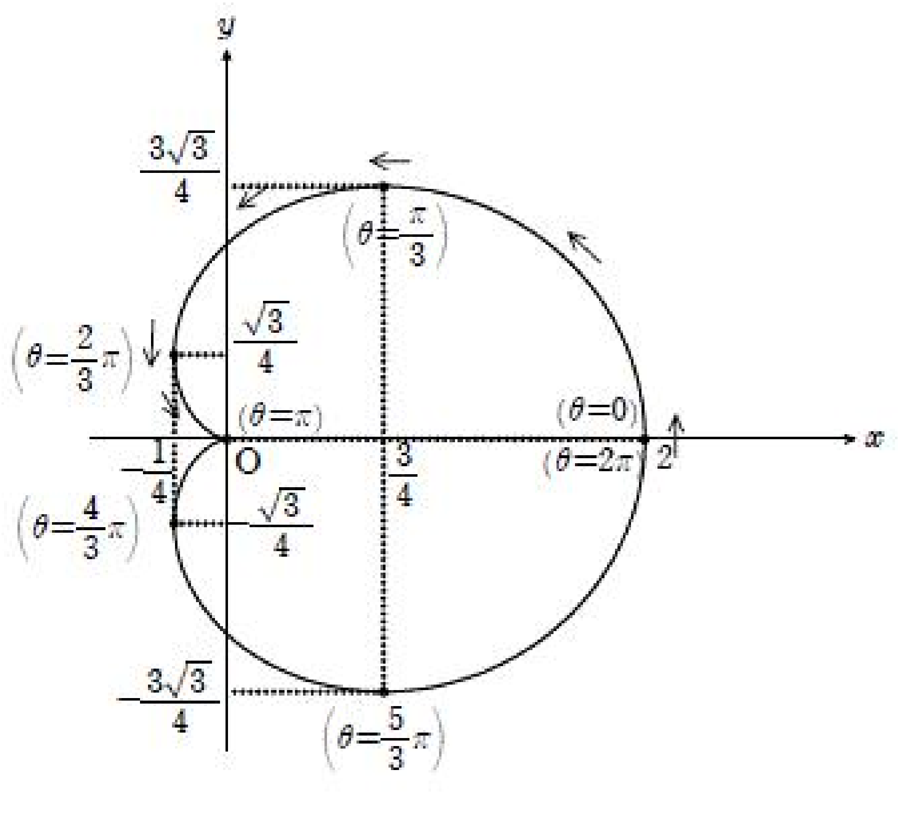
$0\leqq\theta\leqq\pi$ の部分と $\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ の部分は x 軸対称である。

したがって, $0\leqq\theta\leqq\pi$ で調べればよい。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0
x	2		$\frac{3}{4}$		$-\frac{1}{4}$		0
$\frac{dx}{d\theta}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
y	0		$\frac{3\sqrt{3}}{4}$		$\frac{\sqrt{3}}{4}$		0
$(x,\ y)$	$(2,\ 0)$		$\left(\frac{3}{4},\ \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$		$\left(-\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$		$(0,\ 0)$
$\vec{v}$	↑	↖	←	↙	↓	↘	・

ただし, $\vec{v}=\left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right)$ とする.

増減表より, 曲線 C を描くと下図の通り.



(4)

$$\left|\vec{v}\right|^2=\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$$

$$=\sin^2\theta(2\cos\theta+1)^2+(2\cos\theta-1)^2(\cos\theta+1)^2$$

$$=(1-\cos^2\theta)(4\cos^2\theta+4\cos\theta+1)+(4\cos^2\theta-4\cos\theta+1)(\cos^2\theta+2\cos\theta+1)$$

$$=2\cos\theta+2$$

$$=2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)+2$$

$$=4\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\left|\vec{v}\right|=2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

$$\therefore L=\int_0^{2\pi}2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta \qquad \left(u=\frac{\theta}{2}\ \ \therefore du=\frac{1}{2}d\theta \quad \begin{array}{c|ccc} \theta & 0 & \to & 2\pi \\ u & 0 & \to & \pi \end{array}\right)$$

$$=2\int_0^{\pi}|\cos u|\cdot 2\,du$$

$$=4\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u\,du$$

$$=\underline{8} \ \cdots\cdots(\text{答})$$