1．

(1)　　$2t^3-3t^2+1=\underline{(t-1)^2(2t+1)}$（答）

(2)

$$f(x)=x^3+3x^2-3(t^2-1)x+2t^3-3t^2+1$$
$$\begin{aligned}f'(x)&=3x^2+6x-3(t^2-1)\\&=3\{x^2+2x-(t+1)(t-1)\}\\&=3(x+t+1)(x-t+1)\quad(\text{ただし},\ t>0)\end{aligned}$$

x	$\cdots$	$-t-1$	$\cdots$	$t-1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	(極小)	$\nearrow$

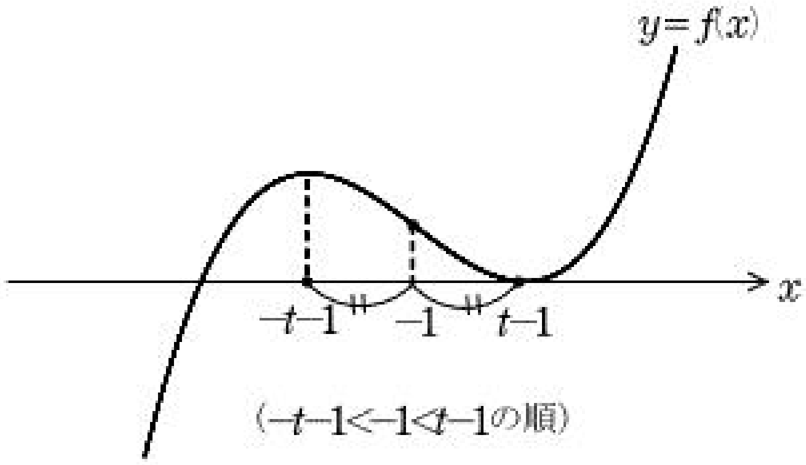
← [$x=t-1$ で $f(x)$ は極小値をもつ]

よって，

$$\begin{aligned}f(t-1)&=(t-1)^3+3(t-1)^2-3(t^2-1)(t-1)+\underbrace{\underline{\underline{2t^3-3t^2+1}}}_{(1)}\\&=(t-1)^2\{(t-1)+3-3(t+1)+(2t+1)\}\\&=(t-1)^2\cdot 0\\&=0\end{aligned}$$

（証明終）

(3)　(2)より，(極値)＝0 に注意して，
グラフを描くと右図の通り．
$-1\leqq x\leqq 2$ について最小値を調べる．



($-t-1<-1<t-1$ の順)

(i)　$2\leqq t-1$　($3\leqq t$) のとき

$$\begin{aligned}m&=f(2)\\&=\underline{\underline{2t^3-9t^2+27}}\end{aligned}$$

(ii)　$t-1\leqq 2$　($0<t\leqq 3$) のとき

$$\begin{aligned}m&=f(t-1)\\&=\underline{\underline{0}}\end{aligned}$$

以上(i)，(ii)より，

$$\underline{m=\begin{cases}2t^3-9t^2+27 & (3\leqq t)\\ 0 & (0<t\leqq 3)\end{cases}\ \text{(答)}}$$

次に，　$-1\leqq x\leqq 2$ について，最大値を調べる．
最大値は，　$f(-1)=2t^3$，$f(2)=2t^3-9t^2+27$ のいずれか．

(iii)　$f(-1)\geqq f(2)$　$\left(9(t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3})\geqq 0\text{ より},\ t\geqq\sqrt{3}\right)$ のとき

$$\begin{aligned}M&=f(-1)\\&=\underline{\underline{2t^3}}\end{aligned}$$

(iv)　$f(-1)\leqq f(2)$　$\left(9(t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3})\leqq 0\text{ より},\ 0<t\leqq\sqrt{3}\right)$ のとき

$$\begin{aligned}M&=f(2)\\&=\underline{\underline{2t^3-9t^2+27}}\end{aligned}$$

以上(iii)，(iv)より，

$$\underline{M=\begin{cases}2t^3 & (t\geqq\sqrt{3})\\ 2t^3-9t^2+27 & (0<t\leqq\sqrt{3})\end{cases}\ \text{(答)}}$$

2．

(1)　$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ と表せる．

条件(i)より，$f(1)=a+b+c=4$ ……①

条件(ii)より，

$$\int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{2}(ax^2+bx+c)dx$$
$$=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_{-1}^{2}$$
$$=3a+\frac{3}{2}b+3c=15$$
$$\left(a+\frac{b}{2}+c=5\ \cdots\cdots②\right)$$

①，②より，

$$\frac{b}{2}=-1 \qquad \therefore \begin{cases} b=-2 \\ a+c=6 \end{cases}$$

∴ $f(x)$ の1次の項の係数は -2 $(=b)$（答）

(2)　(1)の結果より，

$$f(x)=0 \iff ax^2-2x+c=0$$

方程式 $ax^2-2x+c=0$ の2解が $x=\alpha,\beta$ より，

解と係数の関係を求めて，

$$\begin{cases} \alpha+\beta=\dfrac{2}{a} \\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

これより，

$$\begin{cases} a=\dfrac{2}{\alpha+\beta} \\ c=\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} \end{cases}$$

さらに，$a+c=6$ を代入して，

$$\frac{2}{\alpha+\beta}+\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}=6$$
$$\iff 1+\alpha\beta=3(\alpha+\beta)\ \cdots\cdots③\ （答）$$

(3)　α,β が自然数より，

$$③ \iff \alpha\beta-3\alpha-3\beta=-1$$
$$\iff (\alpha-3)(\beta-3)=8 \qquad (\alpha-3\geqq -2,\ \beta-3\geqq -2)$$

（ともに整数）

$$\therefore\ (\alpha-3,\beta-3)=(1,8),(2,4),(4,2),(8,1)\ \leftarrow（絞り込み）$$
$$\therefore\ (\alpha,\beta)=(4,11),(5,7),(7,5),(11,4)$$

・$(\alpha,\beta)=(4,11),(11,4)$ のとき

$$a=\frac{2}{15},\ c=\frac{88}{15}$$

・$(\alpha,\beta)=(5,7),(7,5)$ のとき

$$a=\frac{2}{12}=\frac{1}{6},\ c=\frac{70}{12}=\frac{35}{6}$$

以上より，

$$f(x)=\frac{2}{15}x^2-2x+\frac{88}{15}\ \text{または}\ f(x)=\frac{1}{6}x^2-2x+\frac{35}{6}\ （答）$$

3.

$\overrightarrow{v_1}=(1,1,1)$ ← サイコロの1の目$\left(\frac{1}{4}\right)$

$\overrightarrow{v_2}=(1,-1,-1)$ ← サイコロの2の目$\left(\frac{1}{4}\right)$

$\overrightarrow{v_3}=(-1,1,-1)$ ← サイコロの3の目$\left(\frac{1}{4}\right)$

$\overrightarrow{v_4}=(-1,-1,1)$ ← サイコロの4の目$\left(\frac{1}{4}\right)$

(1) 2回目のサイコロの目の出方を$\{●, ●\}$ と表すと,

「点P_2がx軸上」⇔「1回目と2回目のyとzの成分の和が"0"」

$\{1,2\}, \{2,1\}, \{3,4\}, \{4,3\}$

$\therefore \left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot 4=\frac{1}{4}$ (答)

(2)

$\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_1}=(2,2,2)$ ←$\left(\frac{1}{16}\right)$

$\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_2}=(2,-2,-2)$ ←$\left(\frac{1}{16}\right)$

$\overrightarrow{v_3}+\overrightarrow{v_3}=(-2,2,-2)$ ←$\left(\frac{1}{16}\right)$

$\overrightarrow{v_4}+\overrightarrow{v_4}=(-2,-2,2)$ ←$\left(\frac{1}{16}\right)$

条件をみたすようには作れない

$\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}\left(=\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_1}\right)=(2,0,0)$ ←$\left(\frac{1}{8}\right)$

$\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_3}\left(=\overrightarrow{v_3}+\overrightarrow{v_1}\right)=(0,2,0)$ ←$\left(\frac{1}{8}\right)$

$\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_4}\left(=\overrightarrow{v_4}+\overrightarrow{v_1}\right)=(0,0,2)$ ←$\left(\frac{1}{8}\right)$

$\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3}\left(=\overrightarrow{v_3}+\overrightarrow{v_2}\right)=(0,0,-2)$ ←$\left(\frac{1}{8}\right)$

$\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_4}\left(=\overrightarrow{v_4}+\overrightarrow{v_2}\right)=(0,-2,0)$ ←$\left(\frac{1}{8}\right)$

$\overrightarrow{v_3}+\overrightarrow{v_4}\left(=\overrightarrow{v_4}+\overrightarrow{v_3}\right)=(-2,0,0)$ ←$\left(\frac{1}{8}\right)$

(平行でない2つのベクトルの内積は "0")

${}_6C_2-3=12$ (通り)

$\therefore \left(\frac{1}{8}\right)^2\cdot 12\cdot 2=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$ (答)

(順番を入れ替えて)

(3) 4点P_0, P_1, P_2, P_3が同一平面上にない確率を使い, 余事象の確率を用いて考える.

$\therefore 1-\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left({}_4C_3\cdot 3!\right)$

$=1-\frac{4\cdot 6}{64}$

$=1-\frac{3}{8}$

$=\frac{5}{8}$ (答)