1.

(1)

$$f(x)=\sin x-nx^2+\frac{1}{9}x^3$$
$$f'(x)=\cos x-2nx+\frac{1}{3}x^2$$
$$f''(x)=\underline{-\sin x-2n+\frac{2}{3}x}$$

ここで，　$0<x<\dfrac{\pi}{2}$において，

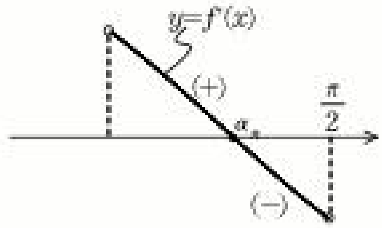
$$-2n<\underline{\frac{2}{3}x-2n}<\frac{\pi}{3}-2n<\frac{4}{3}-2n<0$$

これより，

$$f''(x)=\underbrace{-\sin x}_{(-)}+\underbrace{\frac{2}{3}x-2n}_{(-)}<0\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$　　　（証明終）

(2)

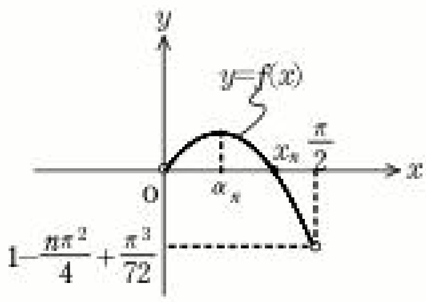
x	(0)	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
$f''(x)$			$-$		
$f'(x)$	(1)		$\searrow$		$\dfrac{\pi^2}{12}-n\pi$



$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{12}-n\pi=\frac{\pi}{12}(\pi-12n)<0$$

これより，　$0<x<\dfrac{\pi}{2}$に$f'(x)=0$をみたす実数$x=\alpha_n$がただ1つ存在する．

x	(0)	$\cdots$	α_n	$\cdots$	$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	$\nearrow$		$\searrow$	$1-\dfrac{n\pi^2}{4}+\dfrac{\pi^3}{72}$



$$f(0)=0$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{n\pi^2}{4}+\frac{\pi^3}{72}<1-\frac{1\cdot 3^2}{4}+\frac{4^3}{72}=-\frac{13}{36}<0$$

よって，　$f(x)=0$は$0<x<\dfrac{\pi}{2}$に，唯一の実数解$\underline{x=x_n}$をもつ．　　　（証明終）

（(3)で使われる文字を先取りしてある）

(3) $f(x_n)=0 \iff \sin x_n-nx_n{}^2+\dfrac{1}{9}x_n{}^3=0$

$$\iff x_n{}^2=\frac{1}{n}\left(\sin x_n+\frac{1}{9}x_n{}^3\right)$$

$\begin{cases}0<\sin x_n<1\\ 0<\dfrac{1}{9}x_n{}^3<\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^3\end{cases}$ より，　$0<x_n{}^2<\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{\pi^3}{72}\right)$

(最右辺) $\to 0$　$(n\to\infty)$　はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}x_n{}^2=0\qquad\therefore\ \lim_{n\to\infty}x_n=0$$　　　（証明終）

さらに，

$$x_n=\frac{\sin x_n+\frac{1}{9}x_n{}^3}{nx_n}$$
$$\iff nx_n=\frac{\sin x_n+\frac{1}{9}x_n{}^3}{x_n}$$
$$=\frac{\sin x_n}{x_n}+\frac{1}{9}x_n{}^2$$

$$\therefore\ \lim_{\substack{n\to\infty\\(x_n\to 0)}}nx_n=\lim_{\substack{n\to\infty\\(x_n\to 0)}}\left(\underbrace{\frac{\sin x_n}{x_n}}_{\to 1}+\frac{x_n{}^2}{9}\right)=\underline{1}$$　（答）

2.

(1)

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}=\sum_{k=0}^{n}\left(-e^{-x}\right)^k=\frac{1-\left(-e^{-x}\right)^{n+1}}{1+e^{-x}} \qquad \left(\because\ -e^{-x}<0\right)$$

$$\therefore\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}-\frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{1-\left(-e^{-x}\right)^{n+1}}{1+e^{-x}}-\frac{1}{1+e^{-x}}$$

$$=\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} \qquad （証明終）$$

(2) (1)より，

$$\int_0^1\left\{1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k e^{-kx}-\frac{1}{1+e^{-x}}\right\}dx=\int_0^1\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$$

$$\Longleftrightarrow\quad \int_0^1 dx+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\int_0^1 e^{-kx}dx-\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$$

$$\Longleftrightarrow\quad 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left[-\frac{e^{-kx}}{k}\right]_0^1-\left[\log\left(e^x+1\right)\right]_0^1=(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$$

$$\Longleftrightarrow\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\left(1-e^{-k}\right)}{k}-\underbrace{\left[\log\frac{e+1}{2}-1\right]}_{S}=(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$$

$$\therefore\ \underline{S=\log\frac{e+1}{2e}}\ （答）$$

(3) $0\leqq x\leqq 1$ において，

$$\frac{1}{1+e^{-x}}\leqq\frac{1}{1+\dfrac{1}{e}}=\frac{e}{e+1}<1$$

$$\therefore\ \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\leqq e^{-(n+1)x} \qquad \left(\because\ e^{-(n+1)x}>0\right)$$

$$\therefore\ \int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\leqq\int_0^1 e^{-(n+1)x}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{n+1}e^{-(n+1)x}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{n+1}\left(1-e^{-(n+1)}\right)$$

$$\leqq\frac{1}{n+1} \qquad （証明終）$$

$$0<\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\leqq\frac{1}{n+1}$$

(最右辺) $\to 0\quad (n\to\infty)$

はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx=0$

ここで，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(1-e^{-k}\right)}{k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\left(1-e^{-k}\right)}{k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\log\frac{e+1}{2e}+(-1)^n\underbrace{\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx}_{\to 0}\right\} \leftarrow ((2)\text{ の結果を利用})$$

$$=\underline{\log\frac{e+1}{2e}}\ （答）$$

3.

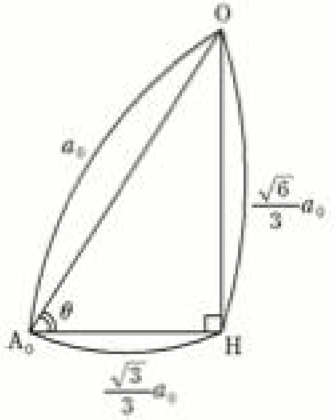
(1)

$$\mathrm{A_0H}=\left(\frac{a_0}{2}\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}a_0$$
$$\mathrm{OA_0}=a_0$$

これより，

$$\mathrm{OH}=\sqrt{{a_0}^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a_0\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}{a_0}^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a_0$$

$$\therefore\ \underline{\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}\ \text{（答）}}$$

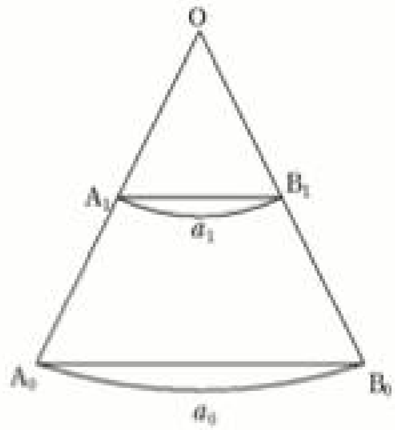


(2) $\mathrm{A_1B_1}=a_1$ より，

$$\mathrm{A_1'B_1'}=\mathrm{A_1A_1'}=\frac{\sqrt{6}}{3}(a_0-a_1)$$

よって，

$$a_1=\frac{\sqrt{6}}{3}(a_0-a_1)$$
$$\Longleftrightarrow\ 3a_1=\sqrt{6}a_0-\sqrt{6}a_1$$
$$\Longleftrightarrow\ a_1=\frac{\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}a_0$$
$$=(\sqrt{6}-2)a_0$$
$$\therefore\ \underline{a_1=(\sqrt{6}-2)a_0\ \text{（答）}}$$



(3)

$$V_1=\frac{1}{2}{a_1}^2\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot a_1$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}{a_1}^3$$
$$=\underline{\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{6}-2)^3{a_0}^3}$$

正三角柱 $\mathrm{A_1B_1C_1-A_1'B_1'C_1'}$ と正三角柱 $\mathrm{A_2B_2C_2-A_2'B_2'C_2'}$ は相似．
相似比は，　$a_0:a_1$，体積比，　${a_0}^3:{a_1}^3$

$$V_k=V_1\left\{(\sqrt{6}-2)^3\right\}^{k-1}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{6}-2)^3{a_0}^3\cdot\left\{(\sqrt{6}-2)^3\right\}^{k-1}$$
$$=\underline{\frac{\sqrt{3}}{4}{a_0}^3(\sqrt{6}-2)^{3k}\ \text{（答）}}\ \left(=\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{4}{a_0}^3\cdot(\sqrt{6}-2)^3}_{\text{（初項）}}\cdot\underbrace{\left((\sqrt{6}-2)^3\right)^{k-1}}_{\text{（公比）}}\right)$$

$0<(\sqrt{6}-2)^3<1$ に注意して，

$$\sum_{k=1}^{\infty}V_k=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}{a_0}^3\cdot(\sqrt{6}-2)^3}{1-(\sqrt{6}-2)^3}$$
$$=\underline{\frac{1}{18}(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}){a_0}^3\ \text{（答）}}$$

4.

$\overrightarrow{v_1}=(1,1,1)$ ← サイコロの 1 の目 $\left(\frac{1}{4}\right)$

$\overrightarrow{v_2}=(1,-1,-1)$ ← サイコロの 2 の目 $\left(\frac{1}{4}\right)$

$\overrightarrow{v_3}=(-1,1,-1)$ ← サイコロの 3 の目 $\left(\frac{1}{4}\right)$

$\overrightarrow{v_4}=(-1,-1,1)$ ← サイコロの 4 の目 $\left(\frac{1}{4}\right)$

(1) 2 回のサイコロの目の出方を $\{●, ●\}$ と表すと,

「点 P_2 が x 軸上」⇔「1 回目と 2 回目の y と z の成分の和が "0"」

$\{1,2\}, \{2,1\}, \{3,4\}, \{4,3\}$

$\therefore \left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot 4=\underline{\frac{1}{4}}$ (答)

(2)

$\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_1}=(2,2,2)$ ← $\left(\frac{1}{16}\right)$

$\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_2}=(2,-2,-2)$ ← $\left(\frac{1}{16}\right)$

$\overrightarrow{v_3}+\overrightarrow{v_3}=(-2,2,-2)$ ← $\left(\frac{1}{16}\right)$

$\overrightarrow{v_4}+\overrightarrow{v_4}=(-2,-2,2)$ ← $\left(\frac{1}{16}\right)$

条件をみたすようには作れない

$\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}\left(=\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_1}\right)=(2,0,0)$ ← $\left(\frac{1}{8}\right)$

$\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_3}\left(=\overrightarrow{v_3}+\overrightarrow{v_1}\right)=(0,2,0)$ ← $\left(\frac{1}{8}\right)$

$\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_4}\left(=\overrightarrow{v_4}+\overrightarrow{v_1}\right)=(0,0,2)$ ← $\left(\frac{1}{8}\right)$

$\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3}\left(=\overrightarrow{v_3}+\overrightarrow{v_2}\right)=(0,0,-2)$ ← $\left(\frac{1}{8}\right)$

$\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_4}\left(=\overrightarrow{v_4}+\overrightarrow{v_2}\right)=(0,-2,0)$ ← $\left(\frac{1}{8}\right)$

$\overrightarrow{v_3}+\overrightarrow{v_4}\left(=\overrightarrow{v_4}+\overrightarrow{v_3}\right)=(-2,0,0)$ ← $\left(\frac{1}{8}\right)$

(平行でない 2 つのベクトルの内積は "0")

${}_6C_2-3=12$ (通り)

$\therefore \left(\frac{1}{8}\right)^2\cdot 12\cdot 2=\frac{24}{64}=\underline{\frac{3}{8}}$ (答)

(順番を入れ替えて)

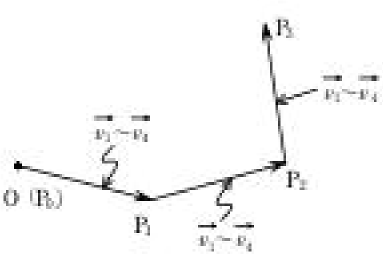
(3) 4 点 P_0, P_1, P_2, P_3 が同一平面上にない確率を使い，余事象の確率を用いて考える.

$\therefore 1-\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left({}_4C_3\cdot 3!\right)$

$=1-\frac{4\cdot 6}{64}$

$=1-\frac{3}{8}$

$=\underline{\frac{5}{8}}$ (答)



(4) $\overrightarrow{v_1}$(1 回), $\overrightarrow{v_2}$(1 回), $\overrightarrow{v_3}$(1 回), $\overrightarrow{v_4}$(1 回) ←(4 回のときだけ)

のとき,

$\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3}+\overrightarrow{v_4}=\overrightarrow{0}$

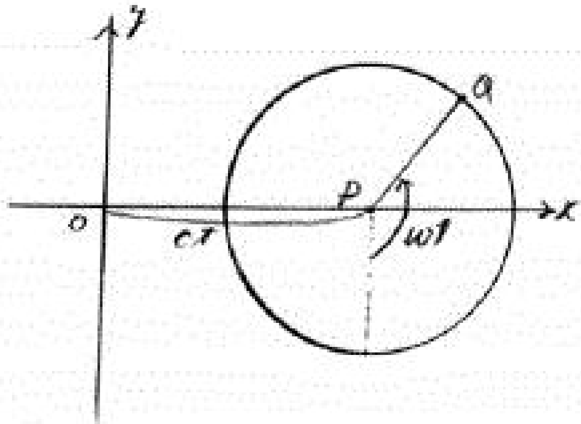
求める確率は,

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot 4!=\frac{24}{256}=\frac{3}{32} & (n=4 \text{ のとき}) \\ 0 & (n=1,2,3,5,6 \text{ のとき}) \end{cases}$$

5 (1) $\overrightarrow{OQ} = (x(t), y(t))$

$= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$

$= (ct, 0) + r\left(\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}),\ \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})\right)$



$\therefore\ Q : \begin{cases} x(t) = ct + r\sin\omega t \\ y(t) = -r\cos\omega t \end{cases}$ (答)

(2) $\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = c + r\omega\cos\omega t \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = r\omega\sin\omega t \end{cases}$

ここで、$\dfrac{dx(t)}{dt} = c + r\omega\cos\omega t$

$= r\omega\left(\cos\omega t + \dfrac{c}{r\omega}\right)$

より、$\dfrac{c}{r\omega} \geqq 1$ $(c \geqq r\omega)$ のとき、$\dfrac{dx(t)}{dt} \geqq 0$ となり $x(t)$は

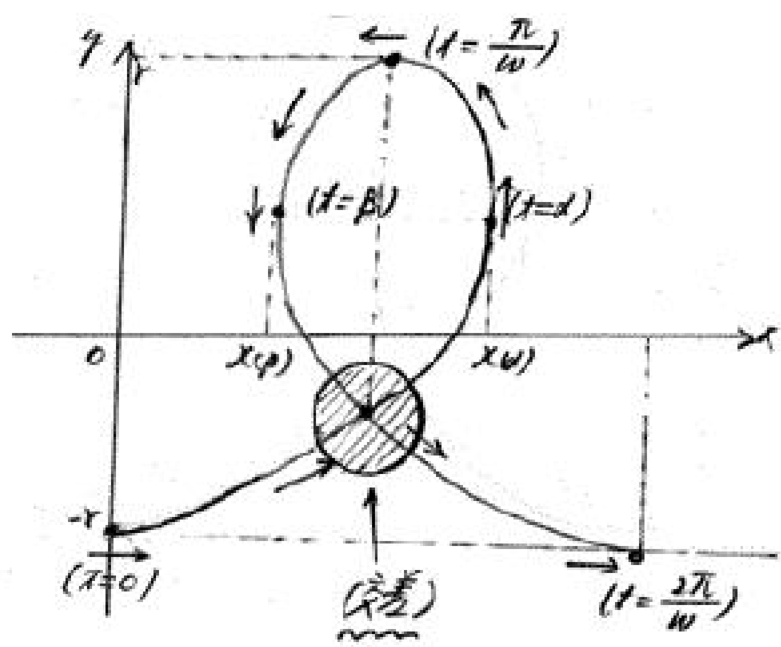
増加するため 交差しない。よって、$0 < \dfrac{c}{r\omega} < 1$ の場合を調べる。

$0 \leqq t \leqq \dfrac{2\pi}{\omega}$ (1周期)で考えればよい。

$\cos\omega t = -\dfrac{c}{r\omega}$ をみたす実数 $t = \alpha, \beta$ $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{\omega} < \beta < \dfrac{2\pi}{\omega}\right)$ が存在

t	0	……	α	……	$\frac{\pi}{\omega}$	……	β	……	$\frac{2\pi}{\omega}$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x(t)$	0		$x(\alpha)$		$\frac{c\pi}{\omega}$		$x(\beta)$		$\frac{2c\pi}{\omega}$
$\frac{dy(t)}{dt}$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
$y(t)$	$-r$		$y(\alpha)$		r		$y(\beta)$		$-r$
$(x(t), y(t))$	$(0, -r)$		$(x(\alpha), y(\alpha))$		$(\frac{c\pi}{\omega}, r)$		$(x(\beta), y(\beta))$		$(\frac{2c\pi}{\omega}, -r)$
$\vec{v}$	$\rightarrow$	$\nearrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	$\downarrow$	$\searrow$	$\rightarrow$

グラフを描くと、次の図の通りとなり 不適



以上より、求める条件は、$c \geqq r\omega$ (答)