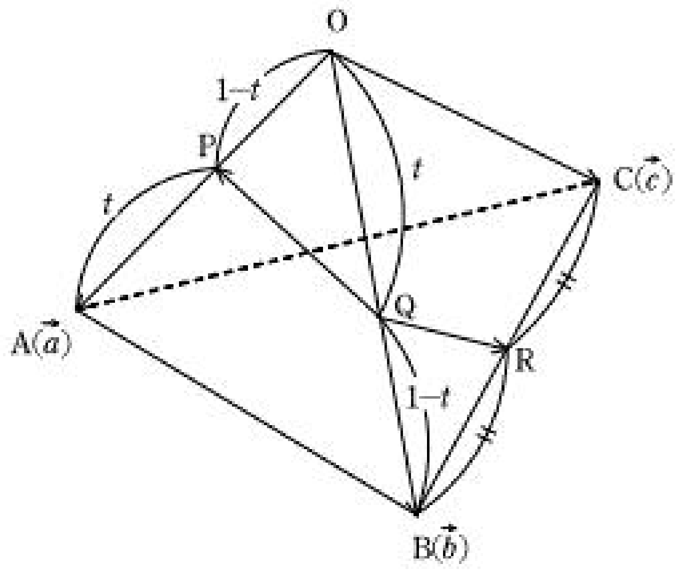
1

(1) $\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}$, $\overrightarrow{OQ}=t\vec{b}$, $\overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ より,



$$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=\underline{\underline{(1-t)\vec{a}-t\vec{b}}} \quad (答)$$

$$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)-t\vec{b}$$

$$=\underline{\underline{\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}}} \quad (答)$$

(2)

$$\begin{cases} \left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=1 \\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}=\left\{(1-t)\vec{a}-t\vec{b}\right\}\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(1-t)\left(\frac{1}{2}-t\right)+\frac{1}{4}(1-t)-t\left(\frac{1}{2}-t\right)-\frac{t}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 6t^2-7t+2=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (3t-2)(2t-1)=0$$

$$\therefore \underline{\underline{t=\frac{1}{2},\frac{2}{3}}} \quad (答)$$

(3)

(i) $t=\frac{1}{2}$ のとき

$\overrightarrow{QP}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$ より, $\left|\overrightarrow{QP}\right|^2=\frac{1}{4}\left(1+1-2\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore \left|\overrightarrow{QP}\right|=\frac{1}{2}$

$\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}\vec{c}$ より, $\left|\overrightarrow{QR}\right|=\frac{1}{2}\left|\vec{c}\right|=\frac{1}{2}$

$$\therefore \triangle PQR=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\underline{\underline{\frac{1}{8}}} \quad (答)$$

(ii) $t=\frac{2}{3}$ のとき

$\overrightarrow{QP}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$ より, $\left|\overrightarrow{QP}\right|^2=\frac{1}{9}\left(1+4-4\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{9}$ $\quad\therefore \left|\overrightarrow{QP}\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\overrightarrow{QR}=\frac{1}{6}\left(3\vec{c}-\vec{b}\right)$ より, $\left|\overrightarrow{QR}\right|^2=\frac{1}{36}\left(9+1-6\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{36}$ $\quad\therefore \left|\overrightarrow{QR}\right|=\frac{\sqrt{7}}{6}$

$$\therefore \triangle PQR=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{6}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{21}}{36}}} \quad (答)$$

2

(1)　$f(x)=(2x-1)^3$ 上の点 $\left(t,\,(2t-1)^3\right)$ での接線は，

$f'(x)=3(2x-1)^2\cdot 2=6(2x-1)^2$ より，

$$y=6(2t-1)^2(x-t)+(2t-1)^3$$

$$\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{y=6(2t-1)^2x-(4t+1)(2t-1)^2\qquad (答)}}$$

$t\neq\dfrac{1}{2}$ のとき，$y=0$ とおいて，

$$x=\frac{(4t+1)(2t-1)^2}{6(2t-1)^2}=\underline{\underline{\frac{1}{6}(4t+1)\qquad (答)}}$$

(2)　「$x_n>\dfrac{1}{2}$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$」……（※）を示す

(I) $n=1$ のとき，$x_1=2>\dfrac{1}{2}$ をみたす．

(II) $n=k$ で成立を仮定．つまり，$x_k>\dfrac{1}{2}$ とする．

ここで，$x_{k+1}=\dfrac{1}{6}(4x_k+1)>\dfrac{1}{6}\left(4\cdot\dfrac{1}{2}+1\right)=\dfrac{1}{2}$

よって，$n=k+1$ でも成立．

以上(I)，(II)より，（※）は成立．（証明終）

また，

$$x_{n+1}=\frac{2}{3}x_n+\frac{1}{6}\quad (x_1=2)$$

$$\Leftrightarrow\quad x_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\left(x_n-\frac{1}{2}\right)\qquad \left(x_1-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore\ x_n-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \underline{\underline{x_n=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}\ \ (n=1,2,3,\cdots\cdots)\qquad (答)}}$$

(3)

$$\begin{aligned}x_{n+1}-x_n&=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\\&=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\\&=-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

よって，

$$\left|x_{n+1}-x_n\right|<\frac{3}{4}\cdot 10^{-5}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}<\frac{3}{4}\cdot 10^{-5}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{n}<10^{-5}$$

$$\Leftrightarrow\quad n\left(\log_{10}2-\log_{10}3\right)<-5$$

$$\Leftrightarrow\quad n\Bigl(\underbrace{\underline{\underline{\log_{10}3-\log_{10}2}}}_{(+)}\Bigr)>5$$

$$\Leftrightarrow\quad n>\frac{5}{\log_{10}3-\log_{10}2}\ \ \cdots\cdots①$$

ここで，$\dfrac{5}{\log_{10}3-\log_{10}2}$ を評価すると，

$$\frac{5}{0.478-0.301}<\frac{5}{\log_{10}3-\log_{10}2}<\frac{5}{0.477-0.302}$$

$$\Leftrightarrow\quad \underset{\Downarrow\ 28.2\cdots\cdots}{\frac{5}{0.177}}<\frac{5}{\log_{10}3-\log_{10}2}<\underset{\Downarrow\ 28.5\cdots\cdots}{\frac{5}{0.175}}$$

これと，①より，

最小の n は　$\underline{\ 29\quad (答)\ }$

3

(1)　$x=1$を解に持つので

$$1-a+b=0 \Leftrightarrow \quad b=a-1$$

$$\therefore (a,b)=(3,\underline{2}),(4,\underline{3}),(5,\underline{4}),(6,\underline{5}) \leftarrow (1,4)(2,3)(3,2)(4,1)$$

$(1,1)$　$(1,2)(2,1)$　$(1,3)(2,2)(3,1)$

よって，求める確率をpとすると

$$p=\frac{10}{6\cdot6\cdot6}=\underline{\underline{\frac{5}{108}}}\ （答）$$

(2)　（※）が整数解$x=\alpha$をもつとする．他の解をβとすると

$\begin{cases}\alpha+\beta=a>0\\ \alpha\beta=b>0\end{cases}$ より，α,βともに正の整数解とわかる．

$\alpha>3$，$\beta>3$と仮定すると，$\alpha+\beta>6 \Leftrightarrow \quad a>6$となり矛盾．

α，βの少なくとも1つは3以下の正の整数解である．（証明終）

(3)　(2)より

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta)=&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),\\&(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),\\&(3,1),(3,2),(3,3),\\&(4,1),(4,2),\\&(5,1)\end{aligned}$$

$$\therefore\ (a,b)=(2,1),(3,\underline{\underline{2}}),(4,\underline{\underline{3}}),(5,\underline{\underline{4}}),(6,\underline{\underline{5}}) \leftarrow (1,4)(2,3)(3,2)(4,1)$$

$(1,1)$　$(1,2)(2,1)$　$(1,3)(2,2)(3,1)$

$\cancel{(3,2)},(4,\underline{\underline{4}}),\ (5,\underline{\underline{6}}),(6,\underline{\underline{8}})$

$(2,6)(3,5)(4,4)(5,3)(6,2)$

$(1,3)(2,2)(3,1)$　$(1,5)(2,4)(3,3)(4,2)(5,1)$

$\cancel{(4,3)},\cancel{(5,6)},(6,\underline{\underline{9}})$

$(3,6)(4,5)(5,4)(6,3)$

$\cancel{(5,4)},\cancel{(6,8)}$

$\cancel{(6,5)}$

27通り

よって，求める確率をqとすると

$$\therefore\ q=\frac{27}{6\cdot6\cdot6}=\underline{\underline{\frac{1}{8}}}\ （答）$$