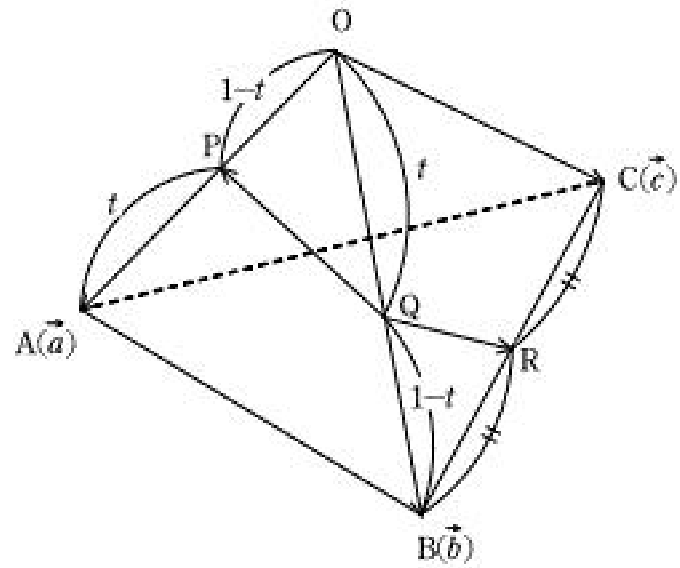
1

(1) $\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}$, $\overrightarrow{OQ}=t\vec{b}$, $\overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ より，



$$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=\underline{\underline{(1-t)\vec{a}-t\vec{b}}}\quad\text{（答）}$$

$$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)-t\vec{b}$$

$$=\underline{\underline{\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}}}\quad\text{（答）}$$

(2)

$$\begin{cases}\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=1\\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}=\left\{(1-t)\vec{a}-t\vec{b}\right\}\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(1-t)\left(\frac{1}{2}-t\right)+\frac{1}{4}(1-t)-t\left(\frac{1}{2}-t\right)-\frac{t}{4}=0$$

$$\Longleftrightarrow 6t^2-7t+2=0$$

$$\Longleftrightarrow (3t-2)(2t-1)=0$$

$$\therefore\ \underline{\underline{t=\frac{1}{2},\frac{2}{3}}}\quad\text{（答）}$$

(3)

(i) $t=\frac{1}{2}$ のとき

$\overrightarrow{QP}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$ より， $\left|\overrightarrow{QP}\right|^2=\frac{1}{4}\left(1+1-2\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore\left|\overrightarrow{QP}\right|=\frac{1}{2}$

$\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}\vec{c}$ より， $\left|\overrightarrow{QR}\right|=\frac{1}{2}\left|\vec{c}\right|=\frac{1}{2}$

$\therefore\triangle PQR=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\underline{\underline{\frac{1}{8}}}$ （答）

(ii) $t=\frac{2}{3}$ のとき

$\overrightarrow{QP}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$ より， $\left|\overrightarrow{QP}\right|^2=\frac{1}{9}\left(1+4-4\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{9}$ $\quad\therefore\left|\overrightarrow{QP}\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\overrightarrow{QR}=\frac{1}{6}\left(3\vec{c}-\vec{b}\right)$ より， $\left|\overrightarrow{QR}\right|^2=\frac{1}{36}\left(9+1-6\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{36}$ $\quad\therefore\left|\overrightarrow{QR}\right|=\frac{\sqrt{7}}{6}$

$\therefore\triangle PQR=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{6}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{21}}{36}}}$ （答）

2

(1)

$$f(x)=\frac{1}{k}\left((k-1)x+\frac{1}{x^{k-1}}\right)\quad (k=2,3,4,\cdots\cdots)\quad (x>0)$$

$$f'(x)=\frac{1}{k}(k-1-(k-1)x^{-k})$$

$$=\frac{k-1}{k}\left(1-\frac{1}{x^k}\right)$$

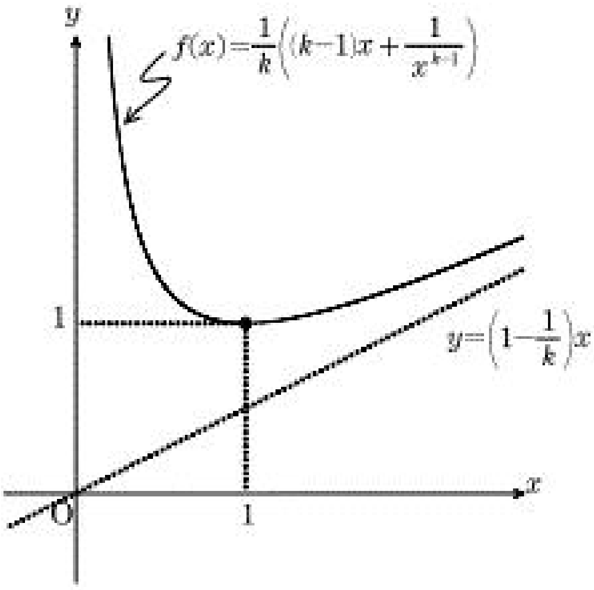
$$=\frac{(k-1)(x^k-1)}{\underbrace{kx^k}_{(+)}}$$

x	(0)	$\cdots\cdots$	1	$\cdots\cdots$	$(+\infty)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$(+\infty)$	↘	1	↗	$(+\infty)$

さらに，$\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=+\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{f(x)-\left(1-\frac{1}{k}\right)x\right\}=0\end{cases}$

より，y 軸と $y=\left(1-\dfrac{1}{k}\right)x$ は漸近線

グラフを描くと右図の通り．



(2)　「$x_n>1$　$(n=1,2,3,\cdots\cdots)$」$\cdots\cdots$（※）を示す

(I) $n=1$ のとき，$x_1>1$ より成立．

(II) $n=k$ で成立を仮定．つまり，$x_k>1$ とする．

$$x_{k+1}=f(x_k)>1\quad (\because (1)\text{のグラフ})$$

よって，$n=k+1$ でも成立．

以上(I)，(II)より，（※）は成立．$x_n>1$　$(n=1,2,3,\cdots\cdots)$ は示された．（証明終）

(3)　平均値の定理より

$$x_{n+1}-1=f'(c)(x_n-1)\qquad (1<c<x_n\text{ に実数 }c\text{ は存在})$$

$$=\underbrace{\frac{k-1}{k}}_{(+)}\underbrace{\left(1-\frac{1}{c^k}\right)}_{(+)}\underbrace{(x_n-1)}_{(+)}$$

$$<\underbrace{\frac{k-1}{k}}_{(+)}\underbrace{(x_n-1)}_{(+)}\qquad \left(1-\frac{1}{c^k}<1\text{ より}\right)$$

$\therefore x_{n+1}-1<\dfrac{k-1}{k}(x_n-1)$ は示された．（証明終）

これより，$0<x_n-1<\dfrac{k-1}{k}(x_{n-1}-1)<\left(\dfrac{k-1}{k}\right)^2(x_{n-2}-1)<\cdots\cdots<\left(\dfrac{k-1}{k}\right)^{n-1}(x_1-1)$

$$(\text{最右辺})\to 0\quad (n\to\infty)\quad \left(\because 0<\frac{k-1}{k}<1\right)$$

はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_n-1)=0$　　$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=1$（答）

3

(1)　$x=1$ を解に持つので

$$1-a+b=0 \iff b=a-1$$

$$\therefore (a,b)=(3,\underline{2}),(4,\underline{3}),(5,\underline{4}),(6,\underline{5})$$

$\underline{2}$：$(1,1)$　$\underline{3}$：$(1,2)(2,1)$　$\underline{4}$：$(1,3)(2,2)(3,1)$　$\underline{5}$：$(1,4)(2,3)(3,2)(4,1)$

よって，求める確率を p とすると

$$\therefore\ p=\frac{10}{6\cdot 6\cdot 6}=\underline{\underline{\frac{5}{108}}}\ （答）$$

(2)　（※）が整数解 $x=\alpha$ をもつとする．他の解を β とすると

$$\begin{cases}\alpha+\beta=a>0\\ \alpha\beta=b>0\end{cases}$$

より，α,β ともに正の整数解とわかる．

$\alpha>3$，$\beta>3$ と仮定すると，$\alpha+\beta>6 \iff a>6$ となり矛盾．

α，β の少なくとも1つは3以下の正の整数解である．（証明終）

(3)　(2)より

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta)=&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),\\&(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),\\&(3,1),(3,2),(3,3),\\&(4,1),(4,2),\\&(5,1)\end{aligned}$$

$$\therefore\ (a,b)=(\overset{\times}{2},1),(\overset{\circ}{3},\underline{\underline{2}}),(\overset{\circ}{4},\underline{\underline{3}}),(\overset{\circ}{5},\underline{\underline{4}}),(\overset{\circ}{6},\underline{\underline{5}})$$

$\underline{\underline{2}}$：$(1,1)$　$\underline{\underline{3}}$：$(1,2)(2,1)$　$\underline{\underline{4}}$：$(1,3)(2,2)(3,1)$　$\underline{\underline{5}}$：$(1,4)(2,3)(3,2)(4,1)$

$$\cancel{(3,2)},(\overset{\circ}{4},\underline{\underline{4}}),(\overset{\circ}{5},\underline{\underline{6}}),(\overset{\circ}{6},\underline{\underline{8}})$$

$\underline{\underline{4}}$：$(1,3)(2,2)(3,1)$　$\underline{\underline{6}}$：$(1,5)(2,4)(3,3)(4,2)(5,1)$　$\underline{\underline{8}}$：$(2,6)(3,5)(4,4)(5,3)(6,2)$

$$\cancel{(4,3)},\cancel{(5,6)},(\overset{\circ}{6},\underline{\underline{9}})$$

$\underline{\underline{9}}$：$(3,6)(4,5)(5,4)(6,3)$

$$\cancel{(5,4)},\cancel{(6,8)}$$

$$\cancel{(6,5)}$$

27通り

よって，求める確率を q とすると

$$\therefore\ q=\frac{27}{6\cdot 6\cdot 6}=\underline{\underline{\frac{1}{8}}}\ （答）$$

4

(1)　$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$（a，b は実数）と表せて，

$$f(1)=1+a+b-3=0 \iff b=-a+2$$

よって，

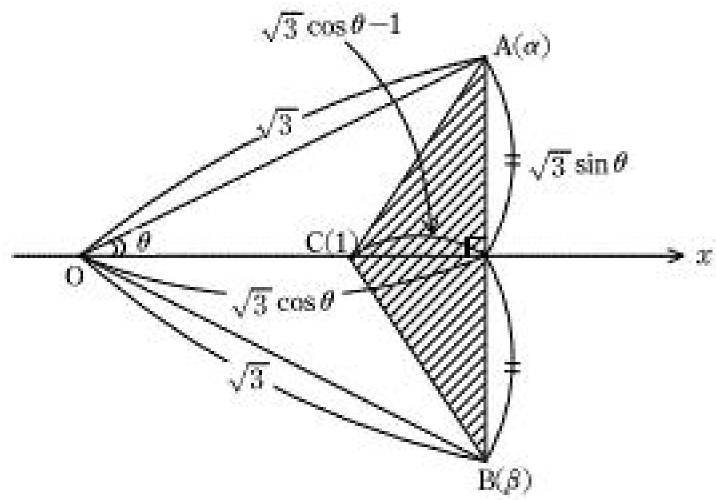
$$\begin{aligned} f(x)&=x^3+ax^2+(2-a)x-3 \\ &=(x-1)\{x^2+(a+1)x+3\} \end{aligned}$$

となり，$x^2+(a+1)x+3=0$ が共役な虚数解 $x=\alpha,\beta$（$\beta=\overline{\alpha}$）をもつ．

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta=\alpha+\overline{\alpha}=-(a+1) \\ \alpha\beta=\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2=3 \end{cases}$$

$\therefore |\alpha|=\underline{\underline{\sqrt{3}}}$（答）



(2)　各辺の長さは右図の通り．

$$\begin{aligned} S=\triangle\mathrm{ABC}&=\left(\sqrt{3}\cos\theta-1\right)\cdot\sqrt{3}\sin\theta \\ &=\underline{\underline{3\sin\theta\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}} \text{（答）} \end{aligned}$$

(3)　$S(\theta)=3\sin\theta\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$（$0\leqq\theta<2\pi$）とおく．

$$\begin{aligned} S'(\theta)&=3\cos^2\theta-3\sin^2\theta-\sqrt{3}\cos\theta \\ &=3\cos^2\theta-3(1-\cos^2\theta)-\sqrt{3}\cos\theta \\ &=6\cos^2\theta-\sqrt{3}\cos\theta-3 \\ &=\left(3\cos\theta+\sqrt{3}\right)\left(2\cos\theta-\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

ここで，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ をみたす $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の θ を φ とおくと，θ の範囲は $0<\theta<\varphi$

$0<\dfrac{\pi}{6}<\varphi$ となるので，

θ	(0)	……	$\dfrac{\pi}{6}$	……	(φ)
$S'(\theta)$		+	0	−	
$S(\theta)$		↗	(最大)	↘	

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ にて $S(\theta)$ は最大となる．$\therefore\ \underline{\underline{\theta=\dfrac{\pi}{6}}}$（答）

$\alpha+\beta=-(a+1)=\alpha+\overline{\alpha}$ より，

$$\begin{aligned} &\alpha+\beta=-(a+1)=2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} \\ &\iff -a-1=3 \\ &\iff a=-4 \end{aligned}$$

$b=-a+2$ より，

$$b=6$$

$\therefore \underline{\underline{f(x)=x^3-4x^2+6x-3}}$（答）

5

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k(1,1,0)=(k,k,0)$　(k：実数) と表され，

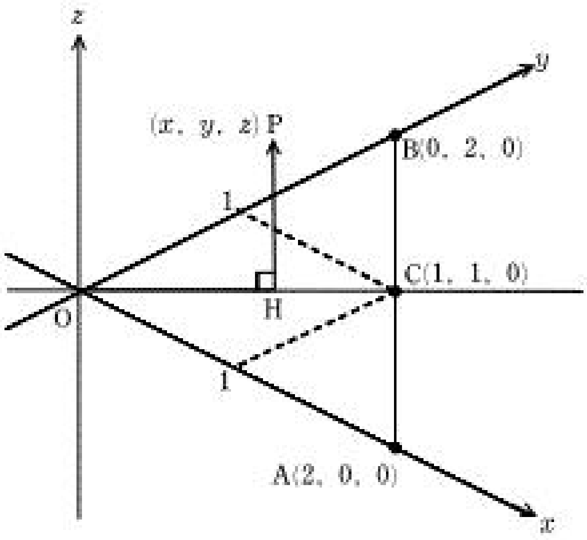
$$\overrightarrow{\mathrm{HP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(x-k,\ y-k,\ z)$$

ここで，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{HP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=(x-k,\ y-k,\ z)\cdot(1,1,0)\\&=x+y-2k=0\end{aligned}$$

$$\therefore k=\frac{x+y}{2}$$

$$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{x+y}{2}(1,1,0)=\left(\dfrac{x+y}{2},\ \dfrac{x+y}{2},\ 0\right)\\ \overrightarrow{\mathrm{HP}}=\left(\dfrac{x-y}{2},\ \dfrac{y-x}{2},\ z\right)\end{cases}\quad(答)$$



(2)

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}|x+y|\right)^2=\frac{1}{2}|x+y|^2=\frac{1}{2}(x+y)^2$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{HP}}\right|^2=2\left(\frac{x-y}{2}\right)^2+z^2=\frac{1}{2}(x-y)^2+z^2$$

より，点 P が L の点であるためには

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{HP}}\right|^2\leqq\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|^2$$

$$\iff\frac{1}{2}(x-y)^2+z^2\leqq\frac{1}{2}(x+y)^2$$

$$\iff z^2\leqq 2xy$$

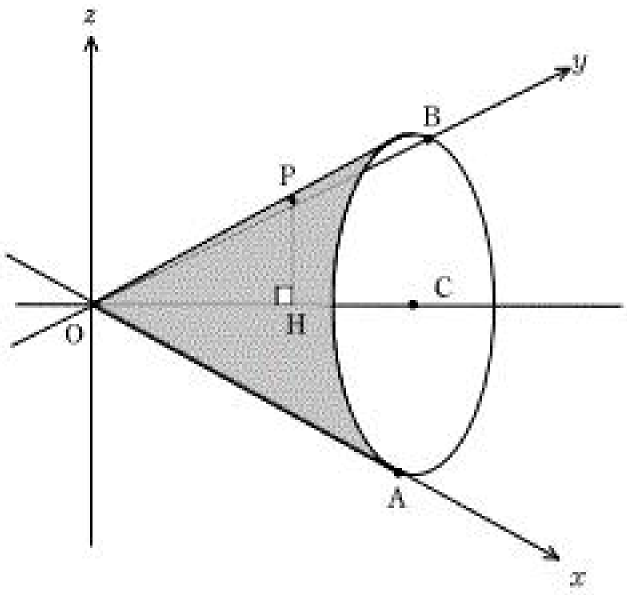
さらに，

$$0\leqq\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|^2\leqq\left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$\iff 0\leqq\frac{1}{2}(x+y)^2\leqq 2$$

$$\iff 0\leqq(x+y)^2\leqq 4$$

$$\therefore 0\leqq x+y\leqq 2$$



以上より，点 P が L の点であるための条件は

$$\begin{cases}z^2\leqq 2xy\\0\leqq x+y\leqq 2\end{cases}$$

となり，題意は示された．(証明終)

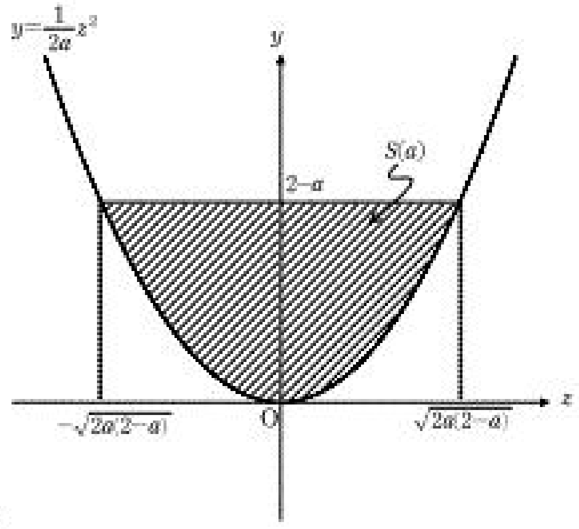
(3)　(2)より，

$$L:\begin{cases}z^2\leqq 2xy\\0\leqq x+y\leqq 2\end{cases}\quad\cdots\cdots①$$

ここで，$x=a$ $(1\leqq a\leqq 2)$ を①へ代入

$$\begin{cases}z^2\leqq 2ay\\0\leqq y+a\leqq 2\end{cases}\qquad\therefore\begin{cases}y\geqq\dfrac{1}{2a}z^2\\0\leqq y\leqq 2-a\end{cases}\quad\xrightarrow[(図示)]{}$$

これを図示すると右図の通り．



$$\begin{aligned}S(a)&=-\int_{-\sqrt{2a(2-a)}}^{\sqrt{2a(2-a)}}\frac{1}{2a}\left(z+\sqrt{2a(2-a)}\right)\left(z-\sqrt{2a(2-a)}\right)dz\\&=\frac{1}{12a}\left(2\sqrt{2a(2-a)}\right)^3\\&=\frac{4}{3}(2-a)\sqrt{2a(2-a)}\quad(1\leqq a\leqq 2)\quad(答)\end{aligned}$$

(4)　求める体積を V とする．

$$\begin{aligned}V=\int_1^2 S(a)\,da&=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_1^2(2-a)\sqrt{a(2-a)}\,da\\&=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_1^2(2-a)\sqrt{1-(a-1)^2}\,da\\&=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta\\&=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta+\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\sin\theta)\cos^2\theta\,d\theta\\&=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{4\sqrt{2}}{3}\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi-\frac{4\sqrt{2}}{9}\quad(答)\end{aligned}$$

$a-1=\sin\theta$　$\therefore da=\cos\theta d\theta$

a	$1\to 2$
θ	$0\to\dfrac{\pi}{2}$