(平 30 前)

数　　学

(理　科　系)

(1 ～ 5 ページ)

・ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

注意　解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数　学(理科系)　150 点

1. t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする．OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とする．辺 OA を $1-t : t$ に内分する点を P, 辺 OB を $t : 1-t$ に内分する点を Q, 辺 BC の中点を R とする．また $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．以下の問に答えよ．

(配点 30 点)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を t, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) $\angle\mathrm{PQR} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき, t の値を求めよ．

(3) t が (2) で求めた値をとるとき, $\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を求めよ．

2. k を 2 以上の整数とする．また

$$f(x) = \frac{1}{k}\left((k-1)x + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$$

とおく．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) $x > 0$ において，関数 $y = f(x)$ の増減と漸近線を調べてグラフの概形をかけ．

(2) 数列 $\{x_n\}$ が $x_1 > 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を満たすとき，$x_n > 1$ を示せ．

(3) (2) の数列 $\{x_n\}$ に対し，

$$x_{n+1} - 1 < \frac{k-1}{k}(x_n - 1)$$

を示せ．また $\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

3. さいころを3回ふって, 1回目に出た目の数を a, 2回目と3回目に出た目の数の和を b とし, 2次方程式

$$x^2 - ax + b = 0 \quad \cdots\cdots (*)$$

を考える. 以下の問に答えよ. (配点30点)

(1) $(*)$ が $x = 1$ を解にもつ確率を求めよ.

(2) $(*)$ が整数を解にもつとする. このとき $(*)$ の解は共に正の整数であり, また少なくとも1つの解は3以下であることを示せ.

(3) $(*)$ が整数を解にもつ確率を求めよ.

4. 整式 $f(x)$ は実数を係数にもつ3次式で, 3次の係数は1, 定数項は -3 とする. 方程式 $f(x)=0$ は, 1と虚数 α, β を解にもつとし, α の実部は1より大きく, α の虚部は正とする. 複素数平面上で $\alpha, \beta, 1$ が表す点を順にA, B, Cとし, 原点をOとする. 以下の問に答えよ. (配点30点)

(1) α の絶対値を求めよ.

(2) θ を α の偏角とする. △ABCの面積 S を θ を用いて表せ.

(3) S を最大にする θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とそのときの整式 $f(x)$ を求めよ.

5. 座標空間において, O を原点とし, A$(2,0,0)$, B$(0,2,0)$, C$(1,1,0)$ とする. △OAB を直線 OC の周りに 1 回転してできる回転体を L とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) 直線 OC 上にない点 P(x,y,z) から直線 OC におろした垂線を PH とする. $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ を x,y,z の式で表せ.

(2) 点 P(x,y,z) が L の点であるための条件は

$$z^2 \leqq 2xy \text{ かつ } 0 \leqq x+y \leqq 2$$

であることを示せ.

(3) $1 \leqq a \leqq 2$ とする. L を平面 $x=a$ で切った切り口の面積 $S(a)$ を求めよ.

(4) 立体 $\{(x,y,z) \mid (x,y,z) \in L,\ 1 \leqq x \leqq 2\}$ の体積を求めよ.