

1.

$$(1) \quad f(2) = 4a + 2b + c = 2 - \frac{c}{2} \Leftrightarrow 8a + 4b + 3c = 4 \quad \dots\dots ①$$

さらに

$$\int_0^6 f(x) dx = \left[ \frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx \right]_0^3$$

$$= 9a + \frac{9}{2}b + 3c = \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow 18a + 9b + 6c = 9$$

$$\Leftrightarrow 6a + 3b + 2c = 3 \quad \dots\dots ②$$

$$①, ② \text{より}, (b, c) = (1 - 2a, 0) \quad \therefore f(x) = ax^2 + (1 - 2a)x \quad (a \neq 0) \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad f'(x) = 2ax + 1 - 2a \text{より}, f'(1) = 1$$

点  $(1, 1 - a)$  における  $y = f(x)$  の接線  $l$  は,

$$y = 1 \bullet (x - 1) + 1 - a \quad \therefore y = x - a \quad (\text{答})$$

(3)

$$f(x) = ax^2 + (1 - 2a)x$$

$$= ax(x + \frac{1 - 2a}{a}) \quad (0 < a < \frac{1}{2})$$

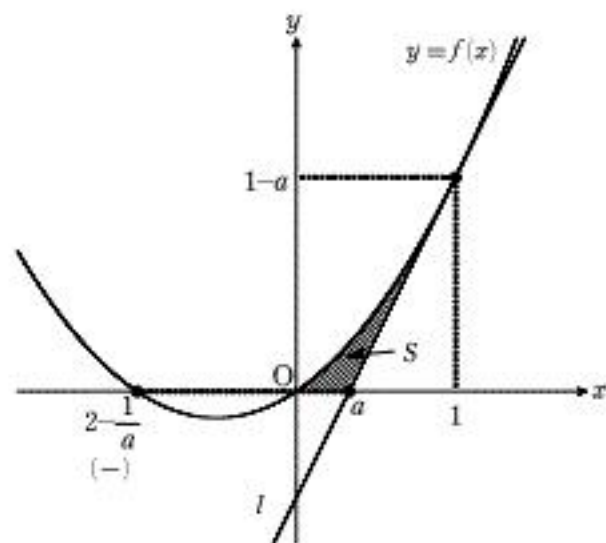
$$S = \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2}(1 - a)^2$$

$$= \left[ \frac{a}{3} x^3 + \frac{1 - 2a}{2} x^2 \right]_0^1 - \frac{1}{2}(1 - a)^2$$

$$= -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a$$

$$= -\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{18}$$

$$\text{これより}, a = \frac{1}{3} \text{のとき} \quad (S \text{の最大値}) = \frac{1}{18} \quad (\text{答})$$



2.

(1)  $m$  を自然数とする。(i)  $n = 3m$  のとき

$$\begin{aligned}
 S_n &= S_{3m} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{3m} \\
 &= m(a_1 + a_2 + a_3) \\
 &= m(1 + 3 + 4) \\
 &= 8m \\
 &= \frac{8}{3}n \quad \left( m = \frac{n}{3} \right)
 \end{aligned}$$

(ii)  $n = 3m - 1$  のとき

$$\begin{aligned}
 S_n &= S_{3m-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{3m-1} \\
 &= 8m - 4 \\
 &= \frac{8n - 4}{3} \quad \left( m = \frac{n+1}{3} \right)
 \end{aligned}$$

(iii)  $n = 3m - 2$  のとき

$$\begin{aligned}
 S_n &= S_{3m-2} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{3m-2} \\
 &= 8m - 7 \\
 &= \frac{8n - 5}{3} \quad \left( m = \frac{n+2}{3} \right)
 \end{aligned}$$

以上(i)~(iii)をまとめて、 $m$  を自然数とすると、

$$S_n = \begin{cases} \frac{8}{3}n & (n = 3m \text{ のとき}) \\ \frac{8n-4}{3} & (n = 3m-1 \text{ のとき}) \\ \frac{8n-5}{3} & (n = 3m-2 \text{ のとき}) \end{cases} \quad \text{または} \quad S_n = \begin{cases} 8m & (n = 3m \text{ のとき}) \\ 8m-4 & (n = 3m-1 \text{ のとき}) \\ 8m-7 & (n = 3m-2 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (\text{答})$$

(2) (1)より、

$$S_n = \begin{cases} 8m & (n = 3m \text{ のとき}) \\ 8m-4 = 8(m-1)+4 & (n = 3m-1 \text{ のとき}) \\ 8m-7 = 8(m-1)+1 & (n = 3m-2 \text{ のとき}) \end{cases} \leftarrow \begin{cases} S_n \text{ は } 8 \text{ で割ると} \\ \text{余りは } 0, 1, 4 \text{ の} \\ \text{いずれか} \end{cases}$$

と表せる。ここで、 $2019 = \frac{8 \cdot 252}{2016} + 3$  より、 $S_n = 2019$  となる自然数  $m$  は存在しない。すなわち、 $S_n = 2019$  となる自然数  $n$  は存在しない (題意は示された)。(3) 一般的に自然数  $k$  は  $k = 4p + q$  ( $p$  は 0 以上の整数,  $q = 0, 1, 2, 3$ ) と表せる。

ここで、

$$\begin{aligned}
 k^2 &= (4p + q)^2 \\
 &= 16p^2 + 8pq + q^2 \\
 &= 8(2p^2 + pq) + q^2 \leftarrow (q^2 = 0, 1, 4, 9)
 \end{aligned}$$

より、 $k^2$  を 8 で割った余りは 0, 1, 4 のいずれかとなる。(2)より  $S_n$  は 8 で割った余り 0, 1, 4 を全て表せるから、 $S_n = k^2$  をみたす自然数  $n$  は存在する (題意は示された)。

3.

(1)

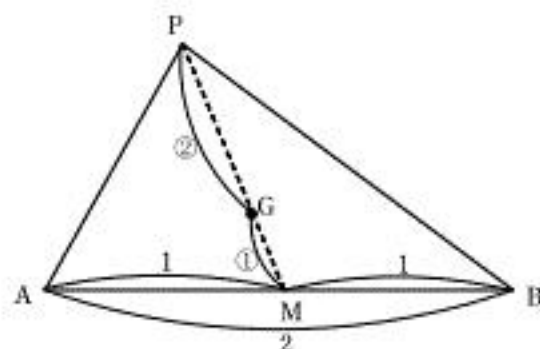
$$\begin{aligned} |\overline{PM}|^2 &= \left| \frac{1}{2}(\overline{PA} + \overline{PB}) \right|^2 \\ &= \frac{1}{4}(|\overline{PA}|^2 + |\overline{PB}|^2 + 2\overline{PA} \cdot \overline{PB}) \dots\dots ① \end{aligned}$$

さらに,

$$\begin{aligned} |\overline{AB}|^2 &= |\overline{PB} - \overline{PA}|^2 \\ &= |\overline{PA}|^2 + |\overline{PB}|^2 - 2\overline{PA} \cdot \overline{PB} = 4 \\ \Leftrightarrow |\overline{PA}|^2 + |\overline{PB}|^2 &= 4 + 2\overline{PA} \cdot \overline{PB} \dots\dots ② \end{aligned}$$

①, ②より,

$$\begin{aligned} |\overline{PM}|^2 &= \frac{1}{4}(4 + 2\overline{PA} \cdot \overline{PB} + 2\overline{PA} \cdot \overline{PB}) \\ &= \overline{PA} \cdot \overline{PB} + 1 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

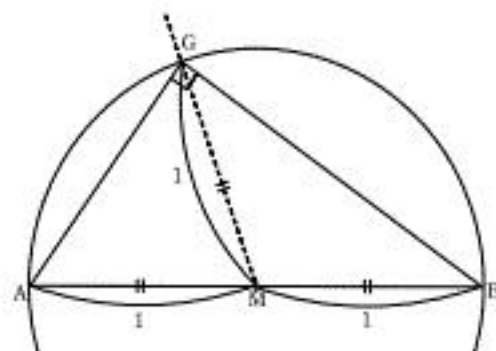


(2)  $|\overline{GM}| = 1$  より,  $|\overline{PM}| = 3$

(1)の結果を用いて,

$$|\overline{PM}|^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB} + 1 = 9$$

$\therefore \overline{PA} \cdot \overline{PB} = 8 \quad (\text{答})$



(3)  $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \frac{5}{4}$  のとき,  $|\overline{PM}|^2 = \frac{9}{4} \therefore |\overline{PM}| = \frac{3}{2} \left( |\overline{GM}| = \frac{1}{2} \right)$

距離に注意して描くと右図の通り.

$\angle ABG = \theta \quad (0 < \theta < \pi)$  とおくと

図より,  $\angle MGB = \frac{\pi}{2}$  のとき角  $\theta$  は最大となる.

$\therefore (\theta \text{ の最大値}) = \frac{\pi}{6} \quad (\text{答})$

