

1.

(1)

$$f(x) = \frac{\log x}{x} \quad (x > 0)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{1 - \log x}{x^2} \end{aligned}$$

増減表を描くと右の通り.

x	(0)		e		$(+\infty)$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	

$x=e$ のとき, $f(x)$ は最大値をとり, (最大値) $= f(e) = \frac{1}{e}$ (答)

(2)

$$g(x) = e^x, g'(x) = e^x$$

$$h(x) = x^a, h'(x) = ax^{a-1} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$x > 0$ において, 共有点 P の x 座標を t (> 0) とおくと,

$$\begin{cases} g(t) = h(t) \\ g'(t) = h'(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^t = t^a & \dots\dots ① \\ e^t = at^{a-1} & \dots\dots ② \end{cases}$$

①, ②を同時にみたす正の術数 t が存在するので,

$$t^a = at^{a-1} \Leftrightarrow t = a$$

①より,

$$e^a = a^a \quad \therefore t = a = e \quad (a > 0, a \neq 1, t > 0, t \neq 1) \quad (\text{答})$$

(3) $x > 0, x \neq e$ において, (1)より,

$$\begin{aligned} & f(e) > f(x) \\ \Leftrightarrow & \frac{\log e}{e} > \frac{\log x}{x} \\ \Leftrightarrow & \log e^x > \log x^e \\ \Leftrightarrow & e^x > x^e \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

2.

(1)

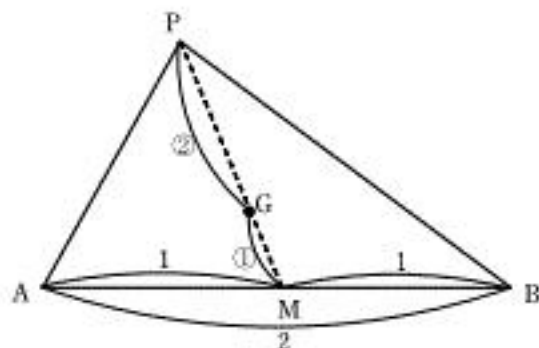
$$\begin{aligned}
 |\overline{PM}|^2 &= \left| \frac{1}{2}(\overline{PA} + \overline{PB}) \right|^2 \\
 &= \frac{1}{4}(|\overline{PA}|^2 + |\overline{PB}|^2 + 2\overline{PA} \cdot \overline{PB}) \dots\dots ①
 \end{aligned}$$

さらに,

$$\begin{aligned}
 |\overline{AB}|^2 &= |\overline{PB} - \overline{PA}|^2 \\
 &= |\overline{PA}|^2 + |\overline{PB}|^2 - 2\overline{PA} \cdot \overline{PB} = 4 \\
 \Leftrightarrow |\overline{PA}|^2 + |\overline{PB}|^2 &= 4 + 2\overline{PA} \cdot \overline{PB} \dots\dots ②
 \end{aligned}$$

①, ②より,

$$\begin{aligned}
 |\overline{PM}|^2 &= \frac{1}{4}(4 + 2\overline{PA} \cdot \overline{PB} + 2\overline{PA} \cdot \overline{PB}) \\
 &= \overline{PA} \cdot \overline{PB} + 1 \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

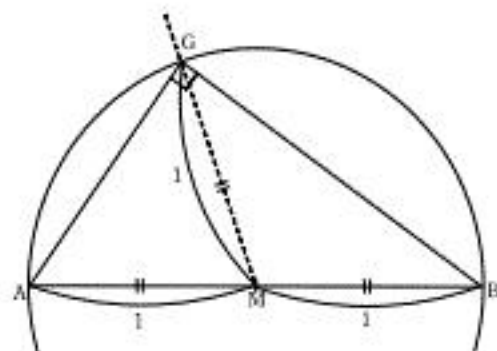


$$(2) \quad |\overline{GM}| = 1 \text{ より, } |\overline{PM}| = 3$$

(1)の結果を用いて,

$$|\overline{PM}|^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB} + 1 = 9$$

$$\therefore \overline{PA} \cdot \overline{PB} = 8 \quad (\text{答})$$

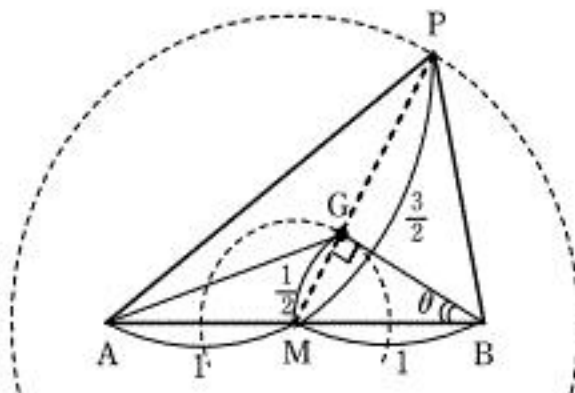


$$(3) \quad \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \frac{5}{4} \text{ のとき, } |\overline{PM}|^2 = \frac{9}{4} \quad \therefore |\overline{PM}| = \frac{3}{2} \quad \left(|\overline{GM}| = \frac{1}{2} \right)$$

距離に注意して描くと右図の通り.

 $\angle ABG = \theta$ ($0 < \theta < \pi$) とおくと図より, $\angle MGB = \frac{\pi}{2}$ のとき角 θ は最大となる.

$$\therefore (\theta \text{ の最大値}) = \frac{\pi}{6} \quad (\text{答})$$



3. 2個のさいころの目を A, B として,

2つの目の積を右の表にまとめてある.

(1)

$$P_2 = \frac{9}{36} \leftarrow (\text{右の } \circ \text{ 印の } 9 \text{ 通り})$$

$$= \frac{1}{4} \quad (\text{答})$$

$$P_3 = \frac{8}{36} \leftarrow (\text{右の } \times \text{ 印の } 8 \text{ 通り})$$

$$= \frac{2}{9} \quad (\text{答})$$

$$P_4 = \frac{5}{36} \leftarrow (\text{右の } \triangle \text{ 印の } 5 \text{ 通り}) \quad (\text{答})$$

A \ B	1	2	3	4	5	6
1	$\circ \times \triangle$ 1	2	$\circ$ 3	$\times$ 4	$\circ \triangle$ 5	6
2	2	$\times$ 4	6	8	$\times$ 10	12
3	$\circ$ 3	6	$\circ \triangle$ 9	12	$\circ$ 15	18
4	$\times$ 4	8	12	$\times$ 16	20	24
5	$\circ \triangle$ 5	$\times$ 10	$\circ$ 15	20	$\circ \times \triangle$ 25	30
6	6	12	18	24	30	36

(2) $n \geq 36$ のとき, (余り) = 1 となるのは, $(A, B) = (1, 1)$ の 1 通りのみ.

$$\therefore P_n = \frac{1}{36} \quad (\text{答})$$

(3) (1)(2)より, $P_n = \frac{1}{18} = \frac{2}{36} \leftarrow (2 \text{ 通り})$ となる n を $5 \leq n \leq 35$ で調べると,

$$n = 6, 12, 15, 24, 35 \quad (\text{答})$$

4.

(1) m を自然数とする。

(i) $n = 3m$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= S_{3m} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{3m} \\ &= m(a_1 + a_2 + a_3) \\ &= m(1 + 3 + 4) \\ &= 8m \\ &= \frac{8}{3}n \quad \left(m = \frac{n}{3} \right) \end{aligned}$$

(ii) $n = 3m - 1$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= S_{3m-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{3m-1} \\ &= 8m - 4 \\ &= \frac{8n - 4}{3} \quad \left(m = \frac{n+1}{3} \right) \end{aligned}$$

(iii) $n = 3m - 2$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= S_{3m-2} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{3m-2} \\ &= 8m - 7 \\ &= \frac{8n - 5}{3} \quad \left(m = \frac{n+2}{3} \right) \end{aligned}$$

以上(i)~(iii)をまとめて、 m を自然数とすると、

$$S_n = \begin{cases} \frac{8}{3}n & (n = 3m \text{ のとき}) \\ \frac{8n-4}{3} & (n = 3m-1 \text{ のとき}) \\ \frac{8n-5}{3} & (n = 3m-2 \text{ のとき}) \end{cases} \quad \text{または} \quad S_n = \begin{cases} 8m & (n = 3m \text{ のとき}) \\ 8m-4 & (n = 3m-1 \text{ のとき}) \\ 8m-7 & (n = 3m-2 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (\text{答})$$

(2) (1)より、

$$S_n = \begin{cases} 8m & (n = 3m \text{ のとき}) \\ 8m-4 = 8(m-1)+4 & (n = 3m-1 \text{ のとき}) \\ 8m-7 = 8(m-1)+1 & (n = 3m-2 \text{ のとき}) \end{cases} \leftarrow \begin{cases} S_n \text{ は } 8 \text{ で割ると} \\ \text{余りは } 0, 1, 4 \text{ の} \\ \text{全ての正の整数} \\ \text{を表している} \end{cases}$$

と表せる。ここで、 $2019 = \frac{8 \cdot 252}{(2016)} + 3$ より、 $S_n = 2019$ となる自然数 m は存在しない。

すなわち、 $S_n = 2019$ となる自然数 n は存在しない (題意は示された)。

(3) 一般的に自然数 k は $k = 4p + q$ (p は 0 以上の整数, $q = 0, 1, 2, 3$) と表せる。

ここで、

$$\begin{aligned} k^2 &= (4p + q)^2 \\ &= 16p^2 + 8pq + q^2 \\ &= 8(2p^2 + pq) + q^2 \quad \leftarrow (q^2 = 0, 1, 4, 9) \end{aligned}$$

より、 k^2 を 8 で割った余りは 0, 1, 4 のいずれかとなる。

(2)より、 S_n は 8 で割った余り 0, 1, 4 の全ての正の整数を表せるから、 $S_n = k^2$ をみたす自然数 n は存在する (題意は示された)。

5.

(1)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin^2 t + (1 + \cos t) \cos t \\ &= 2\cos^2 t + \cos t - 1 \\ &= (2\cos t - 1)(\cos t + 1)\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\cos^2 t + \cos t - 1}{\cos t} = 2\cos t + 1 - \frac{1}{\cos t} \quad (\text{答}) \\ y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2\sin t - \frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\cos t} = -2\tan t - \frac{\tan t}{\cos^2 t} \\ &= -2\tan t - \tan t(\tan^2 t + 1) \\ &= -\tan t(\tan^2 t + 3) \quad (\text{答})\end{aligned}$$

(2)

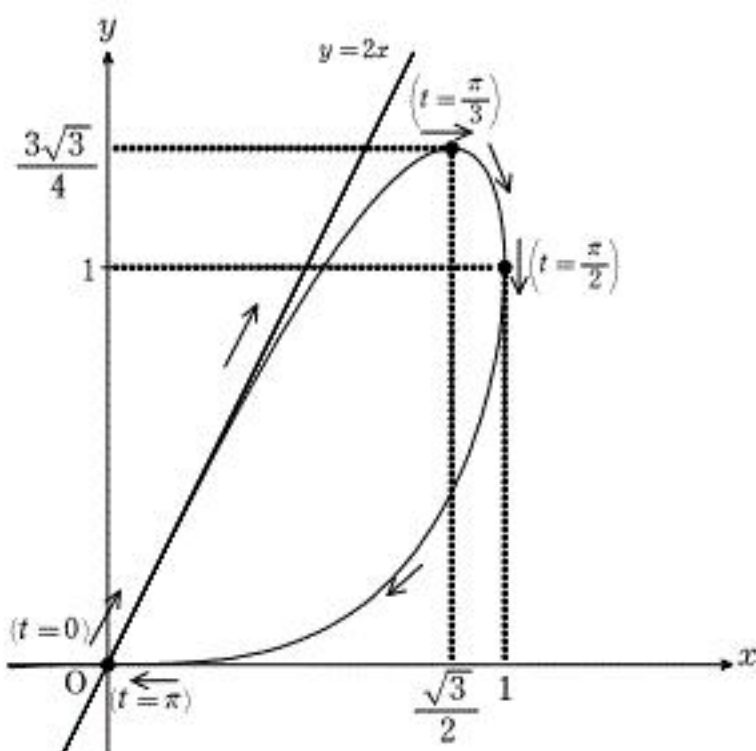
$$y'' = \underbrace{-\tan t}_{(+)} \underbrace{(\tan^2 t + 3)}_{\substack{(\text{上に凸}) \\ (\text{下に凸})}} \text{ より, } y'' \text{ の符号は } 0 < t < \frac{\pi}{2} \text{ で (負), } \frac{\pi}{2} < t < \pi \text{ で (正)}$$

曲線 C の増減表を描くと、
右の通りとなる。

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\frac{dx}{dt}$	+	+	+	+	0	-	-
x	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1		0
$\frac{dy}{dt}$	+	+	0	-	-	-	0
y	0		$\frac{3\sqrt{3}}{4}$		1		0
(x, y)	(0, 0)		$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$		(1, 1)		(0, 0)
$\vec{v}$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$

$$\left[\text{ただし, } \vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \text{ は速度ベクトル} \right]$$

グラフを描くと右図の通り。



(3)

$$\begin{aligned}S &= \int_0^1 y_1 dx - \int_0^1 y_2 dx \left(\left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow y = y_1, \left(\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \right) \rightarrow y = y_2 \right) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos t) \sin t \cdot \cos t dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 + \cos t) \sin t \cdot \cos t dt \\ &= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} \sin 2t + \sin t \cos^2 t \right) dt \\ &= \left[-\frac{1}{4} \cos 2t - \frac{1}{3} \cos^3 t \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{3} \quad (\text{答})\end{aligned}$$