(平 31 前)

数　　学

(文　科　系)

(1～3ページ)

・ページ番号のついていない白紙(2～3枚目)は下書き用紙である。

注意　解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数　学(文科系)　　75点

1. a, b, cを実数とし, $a \neq 0$とする. 2次関数$f(x)$を

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

で定める. 曲線$y = f(x)$は点$\left(2, 2 - \dfrac{c}{2}\right)$を通り,

$$\int_0^3 f(x)dx = \frac{9}{2}$$

をみたすとする. 以下の問に答えよ. (配点25点)

(1) 関数$f(x)$をaを用いて表せ.

(2) 点$(1, f(1))$における曲線$y = f(x)$の接線をℓとする. 直線ℓの方程式をaを用いて表せ.

(3) $0 < a < \dfrac{1}{2}$とする. (2)で求めた直線ℓの$y \geqq 0$の部分と曲線$y = f(x)$の$x \geqq 0$の部分およびx軸で囲まれた図形の面積Sの最大値と, そのときのaの値を求めよ.

2. 次のように 1, 3, 4 を繰り返し並べて得られる数列を $\{a_n\}$ とする.

$$1,\ 3,\ 4,\ 1,\ 3,\ 4,\ 1,\ 3,\ 4,\ \cdots$$

すなわち, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$ で, 4 以上の自然数 n に対し, $a_n = a_{n-3}$ とする. この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする. 以下の問に答えよ. (配点 25 点)

(1) S_n を求めよ.

(2) $S_n = 2019$ となる自然数 n は存在しないことを示せ.

(3) どのような自然数 k に対しても, $S_n = k^2$ となる自然数 n が存在することを示せ.

3. $|\overrightarrow{AB}| = 2$ をみたす $\triangle PAB$ を考え, 辺 AB の中点を M, $\triangle PAB$ の重心を G とする. 以下の問に答えよ.

(配点 25 点)

(1) $|\overrightarrow{PM}|^2$ を内積 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ を用いて表せ.

(2) $\angle AGB = \dfrac{\pi}{2}$ のとき, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ の値を求めよ.

(3) 点 A と点 B を固定し, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \dfrac{5}{4}$ をみたすように点 P を動かすとき, $\angle ABG$ の最大値を求めよ. ただし, $0 < \angle ABG < \pi$ とする.