

数学Ⅱ、数学B

- 〔配点① 教育学部は表示どおりである、
② 理学部生物学科、農学部生産環境工学科および生物資源科学科は表示の1.2倍である、〕
- 〔注意事項：〔1〕～〔3〕は必須、〔4〕～〔6〕から1問選択すること、
選択した問題以外の解答を記入した場合は無効である。〕

〔1〕 a, b, c が1でない正の数であるとき、次の問いに答えよ。

(1) $\log_a b \log_b c \log_c a$ の値を求めよ。

(2) 次の2つの式

$$\log_a b + \log_b c + \log_c a = 3$$

$$\log_b a + \log_c b + \log_a c = 3$$

が成り立つとき、 $a = b = c$ であることを示せ。(60点)

〔2〕 関数 $f(\theta) = \frac{1}{2} \cos 2\theta - 2a \sin \theta + 2a^2 - \frac{1}{2}$ について、次の問いに答えよ。ただし、 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ で、 a は実数とする。

(1) $f(\theta)$ の最大値 $m(a)$ を求めよ。

(2) $y = m(a)$ のグラフをかけ。(65点)

〔3〕 点 $A(a, -1)$ から放物線 $y = kx^2$ に引いた2つの接線の接点を P, Q とし、 PQ の中点を M とするとき、次の問いに答えよ。ただし、 a, k は実数で、 $k > 0$ とする。

(1) 点 A を通り y 軸に平行な直線は点 M を通ることを示せ。

(2) 直線 PQ は a に関係なく1つの定点を通ることを示し、その定点を求めよ。

(3) 放物線 $y = kx^2$ と直線 PQ で囲まれた部分の面積を求めよ。(65点)

〔4〕 数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{36}{12 - a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定めるとき、次の問いに答えよ。

(1) 数学的帰納法を用いて、 $0 < a_n < 6$ が成り立つことを示せ。

(2) $b_n = \frac{1}{a_n - 6}$ とおくと、 b_{n+1} を b_n の式で表せ。

(3) a_n を n の式で表せ。(60点)

- 5 $AB = \sqrt{22}$, $BC = \sqrt{7}$, $CA = 3$ である三角形 ABC について、辺 AB の中点を M 、辺 BC を $5 : 2$ に内分する点を D 、辺 CA を $1 : 2$ に内分する点を E とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ とおくとき、 $\overrightarrow{MD}$ と $\overrightarrow{ME}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

(2) $MD \perp CB$, $ME \perp CA$ であることを示せ。 (60 点)

- 6 a, b を $|a| \neq |b|$, $a \neq 0$ をみたす実数定数とし、複素数 z に対して

$$w = \frac{(a+b)(z+1)}{az+b}$$

とする。次の問いに答えよ。

(1) z が単位円上の点であるとき、 w は点 $a = 1$ を中心とする半径 1 の円周上の点であることを示せ。

(2) z が単位円の内部の点であるとき、 w が $a = 1$ を中心とする半径 1 の円の外部の点であるための a, b の条件を求めよ。 (60 点)